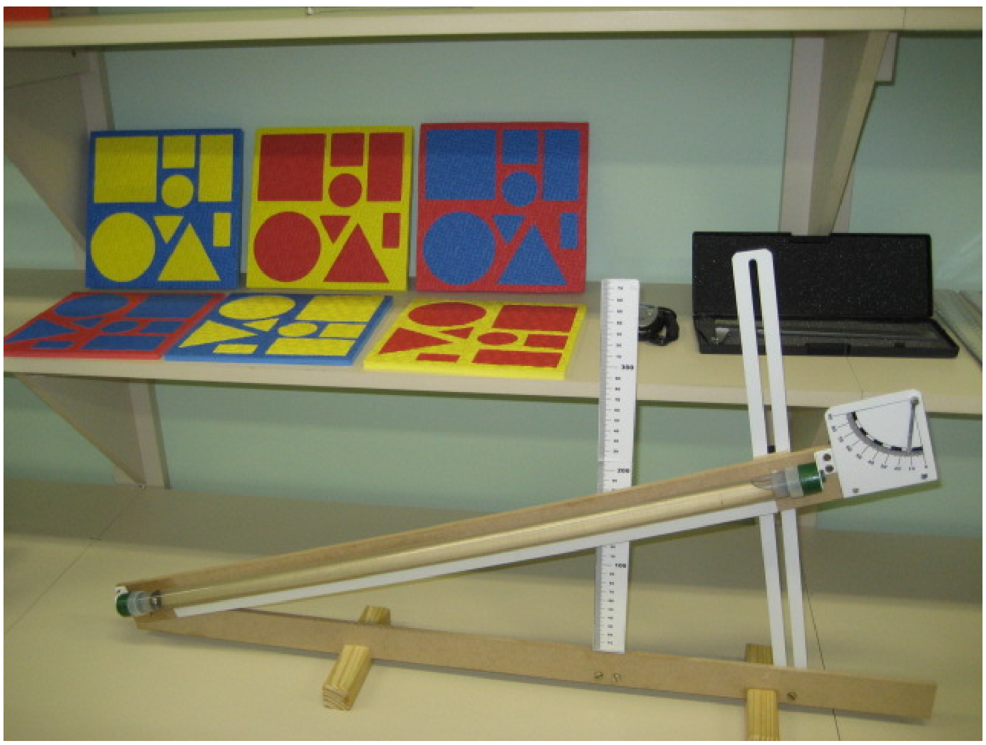
PROJETO:

**"APOIO À MELHORIA DO ENSINO DE CIÊNCIAS E DE MATEMÁTICA
PROJETO ARQUIMEDES-MANAUS"
Convênio nº. 3621/06**

MANUAL DE PRATICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA



**Dr. Jose Anglada Rivera (Coordenador de Matemática)
Dr. Roberto Luis Ballesteros Horta
MSc. Clarice Zita Sanches de Brito e Silva
Dr. Augusto Fachín Terán (Coordenador Geral do Projeto Arquimedes)**

BK Editora

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

Programa de Pós-Graduação em Educação e Ensino de Ciências na Amazônia

PROJETO:

"APOIO À MELHORIA DO ENSINO DE CIÊNCIAS E DE MATEMÁTICA PROJETO ARQUIMEDES-MANAUS"
Convênio nº. 3621/06

MANUAL DE PRATICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Professores

Dr. Jose Anglada Rivera (Coordenador)
Dr. Roberto Luis Ballesteros Horta
MSc. Clarice Zita Sanches de Brito e Silva
Dr. Augusto Fachín Terán (Coordenador Geral do Projeto Arquimedes)

Estudantes

Edson Neves da Silva
Jose de Alcântara Filho
Jaderson Pará Rodrigues

Foto da Capa: Dr. Augusto Fachín Terán

Produção e Editoração BK Editora

Ficha catalográfica **no livro impresso**

Rivera, Jose Anglada
2009

Manual de práticas do Laboratório de Ensino de Matemática / Rivera, Jose Anglada et al. – Manaus: UEA edições/BK editora, 2009.

59 p. 29 cm

ISBN: 978-85-61912-09-3

1. Ensino de Matemática. 2. Ciências. I. Título

CDD 370.510

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

Programa de Pós-Graduação em Educação e Ensino de Ciências na Amazônia

PROJETO:

"APOIO À MELHORIA DO ENSINO DE CIÊNCIAS E DE MATEMÁTICA PROJETO ARQUIMEDES-MANAUS"
Convênio nº. 3621/06

MANUAL DE PRATICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Financiadora
Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP

Conveniente
Fundação de Apoio Institucional MURAKI

Executor:
Universidade do Estado do Amazonas-UEA

Interveniente
Secretaria de Estado de Educação e Qualidade de Ensino-SEDUC

APRESENTAÇÃO

O Projeto Arquimedes, teve sua concepção iniciada em 2001 e incentivada pelo CNPq. Esta iniciativa para despertar o gosto pela ciência foi apresentada em julho de 2003, em Recife, no segundo dia de reuniões da 55ª Reunião Anual da SBPC no Simpósio Educação Científica no Brasil, pelo professor Ennio Candotti, recentemente empossado no cargo de presidente da SBPC.

Esta proposta educacional que tem como objetivo final incentivar o interesse dos alunos pelas ciências, foi iniciada em Manaus, em agosto de 2006, através de um trabalho interinstitucional com a participação da Universidade do Estado do Amazonas, Secretaria de Estado de Educação e Qualidade de Ensino, e Secretaria de Ciência e Tecnologia; com articulação do Programa de Pós-Graduação em Educação e Ensino de Ciências na Amazônia da Escola Normal Superior da UEA; começando sua implementação em 2007. Neste Projeto a tarefa fundamental dos professores universitários é a elaboração de manuais e materiais didáticos, com uma redação clara e uma linguagem adequada para os alunos e professores do Ensino Médio. Como Coordenador Geral do Projeto Arquimedes, apresento esta primeira produção, realizada por um grupo de professores da área de Matemática. Este material didático além de orientar os conteúdos, inclui práticas de laboratório, oficinas de matemática, jogos-experimentos interativos e experimentos de matemática com ambientes de tecnologia informática. O conteúdo apresentado faz parte de uma proposta direcionada a elaborar práticas usando os materiais adquiridos pelo projeto para o Laboratório de Ensino de Matemática. Um dos objetivos que se pretende alcançar com este trabalho é treinar estudantes-monitores e Professores do Ensino Médio com a finalidade de fazer mais prazeroso o Ensino da Matemática nas escolas da rede pública.

Para concluir esta apresentação, é importante lembrar que a edição deste trabalho foi possível com o suporte financeiro da FINEP e SEDUC.

Dr. Augusto Fachín Terán
Coordenador Geral do Projeto Arquimedes

PREFACIO

Este manual é o resultado de um ano de trabalho do grupo de Matemática e Informática do Projeto Arquimedes, relacionado com pesquisas sobre o uso do laboratório de Matemática no Ensino Médio no Estado do Amazonas.

Dois objetivos nortearam a elaboração de este manual ; ajudar aos professores do Ensino Médio do Estado de Amazonas a melhorar qualitativamente sua atuação em sala de aula e testar novas tecnologias de ensino; e contribuir a desenvolver nos alunos a intuição matemática, auxiliá-los a adquirir sólidas habilidades para resolver problemas do cotidiano e aprofundar a essência de conceitos matemáticos importantes.

O manual constitui uma ferramenta de apoio para a realização de praticas de laboratório de Matemática com um estilo agradável, informal, sem ser coloquial, nem excessivamente familiar. Encaramos os alunos como participantes ativos do processo de ensino-aprendizagem e não como sujeitos que executam tarefas excessivamente planejadas. O principal desafio a ser superado é eliminar a visão enciclopédica dos conteúdos e propor uma educação que propicie o aprender a buscar o conhecimentos em situações praticas.

Ao preparar o manual, levamos em conta os problemas existentes em nossa região Amazônica com o laboratório de Matemática; e os comentários de professores e alunos sobre como auxiliá-los melhor para superar os grandes desafios da Matemática. Por isso prestamos muita atenção não somente em discutir o modo correto de analisar uma situação ou resolver um problema, mas também o motivo pelo qual o modo errado de pensar (que pode ocorrer primeiro aos alunos) é realmente errado.

Com base nesses argumentos, projetamos as seguintes partes para este manual.

1. **PRÁTICAS DE LABORATÓRIO:** Fornece 14 praticas de laboratório sobre diferentes temas tais como: Funções, Geometria, Álgebra Linear e Matrizes, Probabilidades e Analise Combinatória.
2. **OFICINAS DE MATEMÁTICA:** Fornece 5 oficinas de matemática nas áreas de Geometria, Álgebra e Calculo com níveis I e II para os diferentes anos de ensino de Ensino Médio.
3. **JOGOS-EXPERIMENTOS INTERATIVOS :** Fornece 9 jogos experimentos interativos com níveis I, II, III adaptados em função da idade e motivação até o 3° ano do Ensino Médio.
4. EXPERIMENTOS DE MATEMÁTICA COM AMBIENTE DE TECNOLOGIA INFORMÁTICA**: Fornece as idéias básicas para o uso de alguns softwares:**
    a) **Softwares de Geometria: CINDERELA, CURVE EXPERT, EUKLID, GEOSPACE, GREAT STELLA.**
    b) **Softwares de Funções:** GRAPHEQUATION, GRAPHMATICA, MATHGV.
    c) Softwares de Álgebra: WINMATR.
    d) Softwares Recreativos: OOG, POLYTRIS, TANGRAN, TESS, TORRE DE HANOI.

Neste manual foram incluídas algumas praticas e materiais de laboratório desenvolvidos pela equipe, práticas desenvolvidas com sucesso pela CDCC da Universidade de São Paulo, softwares desenvolvidos pelo Instituto de Matemática da UFRGS (disponíveis em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br) e materiais de "A Matemática na escola informatizada IMUFRGS Bienal de Matemática/ Outubro 2002. Também foram tidas em conta as indicações sobre o Laboratório Didático de Matemática para o Ensino Médio da firma BRINK MOBIL.

SUMÁRIO

1. PRÁTICAS DE LABORATÓRIO

1.1 Estudo da poluição numa aula de matemática

-Roteiro do professor-

Introdução teórica: Esta atividade tem múltiplos objetivos: evidenciar a importância do ferramental matemático no estudo e resolução de problemas que ocorrem ou naturalmente ou como conseqüência da intervenção do homem na natureza, incentivar a reflexão e desenvolver o espírito crítico do aluno no que diz respeito a essa intervenção.

Com relação à matemática propriamente dita, serão desenvolvidos modelos que envolvem gráficos, manipulação de expoentes e resolução de equações. Os tipos de "modelos" que surgirão naturalmente em nosso estudo serão "modelos recursivos", nos quais cada número depende de números anteriores. Os "modelos" que desenvolveremos estão relacionados com o estudo da poluição em um lago. As atividades referentes a estes modelos poderão ser aplicadas durante o período de um ano escolar, tendo como finalidade reforçar e, eventualmente, ampliar, o conteúdo matemático visto pelos estudantes no ensino médio, enfatizando, em particular, conteúdos de álgebra. Com isso, pretendemos tornar a matemática mais concreta e próxima da realidade, já que os estudantes poderão relacionar números com situações reais. Além disso, pretendemos evidenciar que conceitos algébricos e geométricos estão interligados e não só podem como devem ser utilizados de modo complementar, um em auxílio do outro, na análise de um problema.

Discussão sobre o experimento: Este kit deve ser utilizado com a supervisão do professor, que deverá orientar as atividades a serem desenvolvidas em cada etapa. A sala deverá ser dividida em grupos de 5 alunos e o material utilizado (por grupo)
será o seguinte:

- 3 vasilhames transparentes
- 1 copo plástico
- 1 frasco com corante
- 1 espátula de madeira

Observação: O primeiro vasilhame deverá ser utilizado para armazenar a água limpa, a qual será utilizada para repor a água do "lago" em cada etapa de sua despoluição; o segundo vasilhame deverá representar o "lago" e o terceiro deverá ser utilizado para armazenar a água removida do "lago".

ATIVIDADE 1

Descrição e primeiras conclusões

Suponha que em um habitat constituído por um lago de águas límpidas, com vegetação e espécimes característicos, seja despejada uma certa quantidade de um produto poluente e que ocorra um processo de despoluição natural, promovido pelos seres vivos pertencentes a esse habitat.

Em uma descrição simplificada desse processo natural de despoluição, suponha que os seres vivos do lago purifiquem um quarto do volume de água do lago durante qualquer período de 24 horas.

Use um vasilhame transparente para representar o lago e adicione quatro copos de água ao vasilhame para simular a água do lago. Represente o produto poluente por 16 mL de corante. Utilize o conta-gotas para adicionar 48 gotas de corante ao vasilhame (3 gotas correspondem a 1mL).

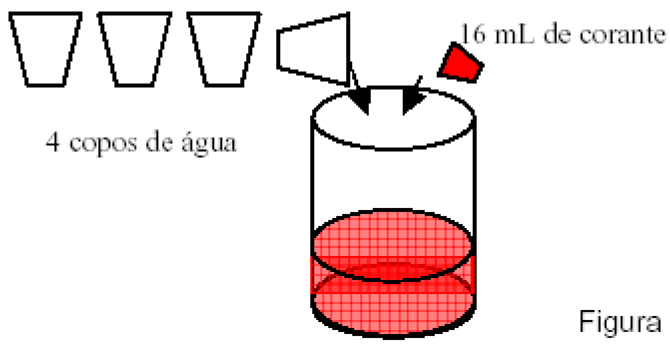


Figura 1

Podemos simular o processo natural de despoluição do lago removendo um copo de água colorida do frasco e recolocando um copo de água pura.

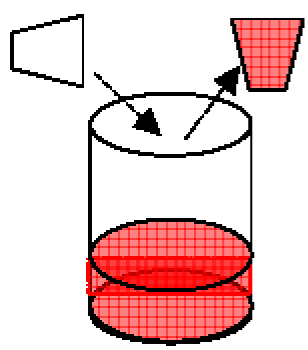


Figura 2

Questões:

1. Quanto de poluição permanece no vasilhame?
Resposta: 12 mL.

2. Assuma que mais nenhum poluente seja adicionado ao lago. Quanto de poluição é eliminado do lago após as próximas 24 horas?
Resposta: **1/4** de 12 mL, ou seja, 3 mL.

3. Represente este processo removendo um copo de água colorida e acrescentando um copo de água limpa.
16 mL de corante
4 copos de água

Suponha que n represente o n-ésimo período de 24 horas considerado e que a(n) represente a quantidade de poluente ao final do n-ésimo período de 24 horas. Continue o experimento para 1, 2, 3, 4,... períodos de tempo e descreva o que você observou em cada um dos passos efetuados, registrando a quantidade de poluente restante (em mL) após cada período.(Use o verso da folha).

Com os resultados obtidos complete a tabela abaixo. Utilize uma calculadora para acompanhar os cálculos que serão realizados.

Período de 24 horas (n)		Poluente (mL) a(n)
0 – 24	n = 1	16
24 – 48	n = 2	12
48 – 72	n = 3	9
72 – 96	n =4	6,75
96 – 120	n =5	5,06
120 – 144	n =6	3,8
144 – 168	n =7	2,85

4. Supondo que o volume total de líquido no lago (água + poluente) seja 100mL, determine qual fração deste volume representa a quantidade de poluente, em cada período de tempo da tabela acima.
Resposta: **16/100,12/100, 9/100** e assim por diante.

5. Pesquisar quais são as substâncias necessárias para fazer um detergente.
Resposta:

6. Quais são as conseqüências de uma quantidade elevada de detergente num lago com peixes? Explique.
Resposta:

ATIVIDADE 2

Abordagem Recursiva, Algébrica e Gráfica

PARTE A
(Referente à Atividade 1)

Para cada n-ésimo período de tempo de 24 horas, a quantidade de poluente no lago no início daquele período, a(n), será chamado a **quantidade inicial**, e a quantidade ao término daquele período, a(n+1), será chamada de **quantidade final**.

Por exemplo, para o primeiro período de 24 horas, a(1)=16 é a quantidade inicial e a(2) =12 é a quantidade final.
A relação entre a(n) e a(n+1) para n períodos de 24 horas é representada pela **equação recursiva:**
a(n+1) = 0.75 a(n), para n≥ 1 (observação ¼ = 0,75)

Questões:
1. Por que esta é a equação que representa o processo?
Resposta: Esta equação nos dá a quantidade de poluição no lago em algum momento se nós soubermos a quantidade de poluente no período anterior. Se tivermos um valor inicial para a(n) (16 mL, por exemplo) conseguiremos montar uma tabela como a do exercício 3 (Atividade 1).
2. Considere a(1) = 16 (a quantidade inicial de poluente no lago). Suponha agora, que um certo teste possa detectar 1 mL de poluente no lago (1 mL de água colorida no recipiente). Após a dose inicial de 16 mL, até quando o teste de poluição será eficiente?

Para responder a esta questão, complete a tabela a seguir utilizando a equação recursiva acima.(Anote os cálculos no verso da folha).

Período de 24 horas (n)	Poluente (mL) a(n)	Poluente (mL) a(n+1)
n = 1	16	12
n = 2	12	9
n = 3	9	6,75
n = 4	6,75	5,06
n = 5	5,06	3,8
n = 6	3,8	2,85
n = 7	2,85	2,14
n = 8	2,14	1,6
n = 9	1,6	1,2
n = 10	1,2	0,9

Resposta: O teste é eficiente para 9 períodos de tempo.

3. Suponha agora que o teste pudesse detectar até 0,0001 mL de poluição. Como o método recursivo demandaria muito tempo e vários cálculos, complete os dados abaixo a fim de obter um método mais rápido para determinar o valor de a(n)

sabendo-se apenas o valor da quantidade inicial de poluente a(1). Desta forma teremos um método mais rápido para determinar a eficiência do teste.
Sabe-se inicialmente que:
a(1) = 16
a(2) = 0,75·a(1)
a(3) = 0,75.a(2) = 0,75. 0,75 .a(1) = (0,75)2.a(1)
a(4) = 0,75.a(3) = 0,75. $(0,75)^2$.a(1) = $(0,75)^3$.a(1)
a(5) = 0,75.a(4) = 0,75. $(0,75)^3$.a(1) = $(0,75)^4$.a(1)
a(6) = 0,75.a(5) = 0,75. $(0,75)^4$.a(1) = $(0,75)^5$.a(1)

Repetindo sucessivamente estes cálculos, este raciocínio nos sugere uma equação mais geral. Esta nova equação é chamada de **Progressão Geométrica**. Tente escrevê-la.
Resposta: a(n) = q $^{n-1}$.a(1)

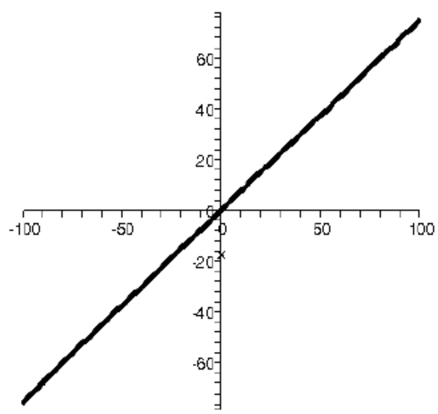
PARTE B

Observação: Chame de **x** a quantidade de poluente no lago no início de cada período de 24 horas e de **y** a quantidade de poluente no lago ao final desse mesmo período.

Questões:

1. Considerando as variáveis x e y acima, e a taxa de despoluição do lago mencionada anteriormente, qual a relação que representa y como função de x?
Observe que os valores a(n) e a(n+1) obtidos na tabela da ATIVIDADE 1 satisfazem a relação entre as variáveis x e y que você obteve.
Resposta: y=(0,75)x.

2. Construa o gráfico da função obtida no item anterior, e represente sobre ele os pontos (a(n), a(n+1)), obtidos na Parte A desta atividade.



3. Analise o gráfico obtido e verifique se os números a(1), a(2), ..., estão convergindo para algum valor ou não. Se a resposta for positiva, o valor encontrado será denominado **valor de equilíbrio.**
Resposta: Observemos desta análise que a seqüência está convergindo em direção à origem, (0,0), o que significa que os números a(1), a(2), ..., estão convergindo para zero. Notemos também que o ponto (0,0) é o ponto de

interseção das duas retas. O valor da coordenada x do ponto de interseção é chamado VALOR DE EQUILÍBRIO para a relação (1).

A razão para este nome é a seguinte: se a(1) = 0 então a(2) = 0,75.a(1) = 0, a(3) = 0, ..., isto é, a quantidade de poluente no lago não se altera. Dizemos então que o lago está em equilíbrio.

PARTE C

Considere agora uma nova situação em que a cada período de 24 horas uma nova quantidade (fixa) de poluente é adicionada ao lago e que ocorra, também a cada período de 24 horas, um processo de despoluição natural de ¼ do volume de água. Esta nova situação pode ser simulada como abaixo: Inicie com 4 copos de água e 16 mL de poluente (corante), e, como anteriormente, troque um copo de água do recipiente por um copo de água pura, reduzindo a quantidade de poluente para 12 mL. Em seguida, simule a adição de uma nova quantidade de poluente, acrescentando 1 copo de água pura com mais 16 mL de poluente. Após esse processo, determine a quantidade de poluente no lago.
Resposta: 28 mL.

Repita este processo e verifique quanto de poluente restará no vasilhame se em mais 24 horas um novo copo de água colorida for removida. Resposta: 21mL Em seguida volte a adicionar 16 mL de poluente juntamente com um copo de água pura e determine o total de poluição no lago. Resposta: 37 mL.

Questões:

1. Você acha que a água do lago se transformará em poluente se você continuar com esse processo?
Resposta:

2. Suponha que em algum momento a quantidade de poluente no lago seja de 100mL. Quanto restará de poluente, em mL, após as próximas 24 horas? E nas próximas 48 horas? O que isso sugere?
Resposta: Durante 24 horas o lago elimina 25% do poluente, restando 75mL. Uma taxa de poluição de 16mL é acrescentada elevando-se o total para 91 mL. Logo, se a quantidade inicial de poluente no lago fosse de 100 mL, então a quantidade de poluente no lago no período seguinte seria menor (91 mL). Procedendo de maneira análoga, teríamos 84,25 mL de poluente no lago, após 48 horas. Isto nos mostra que a quantidade de poluente não deverá crescer indefinidamente.

3. Outra maneira de responder esta questão é usar uma equação recursiva que represente este novo modelo. A **equação recursiva** é dada por:

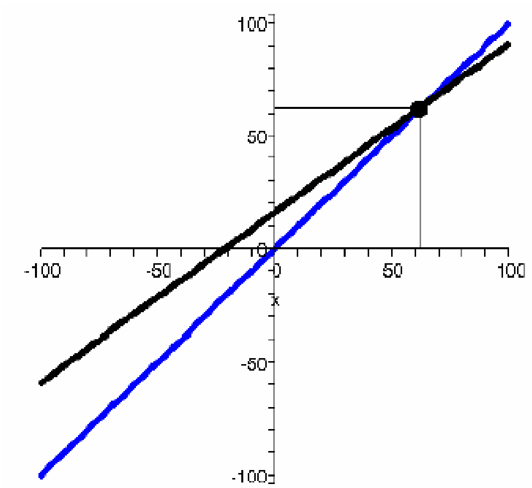
a(n+1) = 0,75 a(n) + 16

Explique com suas palavras porque esta equação recursiva representa este novo modelo.
Resposta: Durante o n-ésimo período de tempo, um quarto da água e, conseqüentemente, um quarto da quantidade a(n) de poluente, é removido do

vasilhame. A quantidade de poluente que permanece no vasilhame, até esse momento, é igual a 0,75.a(n). Mas, em seguida, com o acréscimo de mais 1 copo de água pura e 16mL de poluente, a quantidade de poluente será de 0,75.a(n) + 16.
Observação: Denote por a(n) a quantidade de poluente no lago no início do n-ésimo período de tempo.

4. Suponha que a quantidade de poluição do lago tenha se estabilizado em um **valor de equilíbrio x**, ou seja, que após cada período de 24 horas, o lago volte a ter x mL de poluente na água. Esse valor x deverá satisfazer então a equação **x = 0,75x + 16.** Resolva a equação, e encontre o valor de x.
Resposta: x=64

5. Para fazer a representação gráfica da nova situação, denote a quantidade de poluição no início de um período de 24 horas por x e a quantidade ao final de um período de 24 horas, acrescida de uma nova taxa de poluição, por f(x). Assim, obtemos a relação: **f(x) = 0,75x + 16**
Construa o gráfico com os valores correspondentes à nova situação mencionada acima.



6. Ainda utilizando o sistema cartesiano acima, construa a reta y = x e anote o ponto de interseção das duas retas. O valor da abscissa encontrado no ponto de interseção é denominado **valor de equilíbrio**.

7. Em termos quantitativos e qualitativos, o que representa o valor de equilíbrio para este modelo de lago simulado?
Resposta: Observe que a seqüência de pontos está convergindo para o ponto (64, 64), que é o ponto de interseção das duas retas.

Assim, a relação recursiva f(x) = 0,75x + 16 tem x = 64 como valor de equilíbrio. Notemos que se o recipiente começa com a(1) = 64mL e 16mL são adicionados a cada período de tempo, então a(2) = 0,75.a(1)+16 = 0,75 . 64 + 16 = 64 e assim a(1) = a(2) = a(3) =.... = 64, e o ambiente está em equilíbrio.

ATIVIDADE 3
Método Logarítmico
Um método ainda mais rápido para determinar o período de tempo em que o teste de poluição será eficiente envolve o uso da função logarítmica.

Questões:
1. Supondo que o teste é eficiente para qualquer período de tempo n, para o qual a quantidade de poluente a(n) restante no lago seja maior que 0,0001 mL, isto é,

$$(0,75)^{n-1}.16 > 0,0001 \rightarrow (0,75)^{n-1} > \frac{0,0001}{16},$$

Aplique log em ambos os lados e, a seguir, utilize as propriedades da função logarítmica. Resposta:

$$(n-1).\log(0,75) > \log(10^{-4}) - \log(2^{4})$$

2. Divida ambos os lados por log(0,75), invertendo o sentido da desigualdade (pois log(0,75) é um número negativo). Novamente aplique as propriedades da função logarítmica.
Resposta:

$$\frac{(n-1).\log(0,75)}{\log(0,75)} < \frac{\log(10^{-4}) - \log(2^{4})}{\log(0,75)}$$

$$(n-1) < \frac{-4.\log 10 - 4.\log 2}{\log \frac{3}{4}}$$

$$n-1 < \frac{-4.1 - 4.(0,3010)}{\log 3 - \log 4}$$

$$n-1 < \frac{-4-1,204}{0,4771-0,602}$$

$$n-1 < 41,665332$$

$$n < 42,665332$$

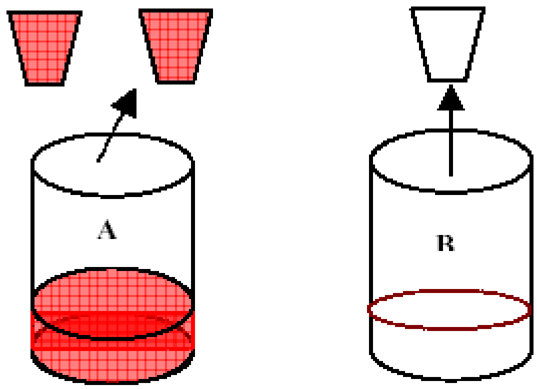
3. Após realizar os cálculos, você conclui que o teste é eficiente para que valores de n?
Resposta: Para n < 42,665.

ATIVIDADE 4

Sistemas Lineares e Matrizes

Para estudar a relação entre o lago e um reservatório de tratamento de água, parte da água do lago poluída será encaminhada para tratamento no reservatório e logo após retornará ao lago. Além disso, uma nova taxa de poluição será acrescida.

Para simular esta situação utilize dois recipientes (A e B). O recipiente A deverá conter 4 copos de água, simulando o lago e o recipiente B irá conter 2 copos de água, simulando o reservatório de tratamento de água. Adicione 16 mL de corante ao recipiente A para simular a primeira taxa de poluição. Remova 2 copos de água do recipiente A e 1 copo de água do recipiente B e reserve.



Coloque o copo de água límpida, removida de B, dentro do recipiente A. Para manter o nível constante de 4 copos, acrescente no recipiente A um copo de água pura (reservada num recipiente à parte) e 16 mL de poluente.

Despeje um dos copos do recipiente A dentro do recipiente B (que passará por um processo de tratamento) e exclua o outro. Neste exemplo, a quantidade de poluente final de um período de 24 horas no lago será representada por a(n) e a quantidade de poluente no recipiente B, no mesmo período, será representado por b(n). Considere a(1) = 16 e b(1) = 0

$\mathbf{a_{n+1} = 0,5 \,.\, a\,n + 0,5 \,.\, bn + 16}$

$\mathbf{b_{n+1} = 0,25 \,.\, a\,n + 0,5 \,.\, bn}$

As equações acima nos oferecem um par de valores de equilíbrio, a e b, um para cada recipiente. Para encontrar esses valores, reescreva essas relações na forma matricial, obedecendo a seguinte relação:

$An+1 = M\cdot n\,A + B$

Questão:

1. Resolva a equação acima para n = 1, 2, 3, 4,... e verifique para quais valores esses cálculos convergirão.

Resposta: Estes valores convergirão para a = 64 e b = 32.

1.2. O jogo dos discos.

-Roteiro do professor-

Introdução teórica: Através desse jogo bem interessante o professor pode abordar o conceito de probabilidade geométrica, que normalmente não é visto na escola fundamental e média. Neste kit, o conceito de Probabilidade Geométrica será abordado teoricamente e experimentalmente. Nas atividades a serem desenvolvidas. O professor trabalhará a compreensão intuitiva, a matematização inicial, a abstração, a formalização dos conceitos de função, constantes e variáveis, através do exemplo de uma função quadrática.

Discussão sobre o experimento: A simulação do jogo dos discos com os alunos, tem múltiplos objetivos, tais como analisar aspectos experimentais, de modelagem e históricos, evidenciar a importância do ferramental matemático no estudo e resolução de problemas que ocorrem ou naturalmente ou como conseqüência da intervenção do homem, incentivar a reflexão e desenvolver o espírito crítico do aluno no que diz respeito a essa intervenção.
O material utilizado é o seguinte:

- 5 discos de 4cm de diâmetro
- 5 discos de 6cm de diâmetro
- 5 discos de 8cm de diâmetro
- 5 discos de 10cm de diâmetro
- 5 discos de 12cm de diâmetro
- 5 discos de 14cm de diâmetro

Sugere-se realizar esta atividade na sala de aula, pátio da escola ou outro ambiente em que o piso seja constituído de quadrados de 30cm de lado. Se a escola não possuir pisos com essa medida, os quadrados poderão ser desenhados no chão com giz ou fita crepe, por exemplo.

Procedimento:

- A sala deverá ser dividida em 6 grupos, cada qual trabalhará com um tipo de diâmetro.
- Cada grupo deverá ler atentamente o texto abaixo e, a seguir, fazer a simulação dos lançamentos com os discos.
- As anotações dos eventos deverão ser feitas na Tabela de Lançamentos e o resultado final deverá ser passado ao professor, o qual colocará na lousa os dados de todos os grupos (referente a cada diâmetro).
- Os grupos deverão então responder às questões sobre a atividade, que estão em anexo.
- O professor deverá orientar o preenchimento das tabelas, bem como a construção do gráfico.
- Ao final das atividades, o professor pode pedir para cada aluno fazer em anexo um relatório contando o desenvolvimento e resolução desta atividade.
- Se o professor já tiver alguma familiaridade com o uso de Mapa Conceitual, poderá fazer um fechamento dessa atividade como forma de avaliação.

- Se o professor pretender usar um piso de outro tamanho, deverá fazer experimentos antecipadamente. Os pisos com peças defeituosas ou mal colocadas podem interferir significativamente no resultado. Observação: cada grupo deverá fazer, pelo menos, 200 lançamentos (arremessando os discos de costas).

Referências e mais informações:

Texto adaptado de Hipertexto Pitágoras http://www2.dm.ufscar.br/hp/ (Departamento de Matemática da UFSCar). Revista do Professor de Matemática, da Sociedade Brasileira de Matemática.

Texto: O Jogo dos Discos

Uma escola estava preparando uma Festa Junina e foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo para arrecadar fundos. Os estudantes observaram que no pátio, onde seria montada a barraca do jogo, o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado. Pensaram então em construir discos com um certo diâmetro d, que seriam comprados pelos visitantes por R$ 1,00 cada um. O visitante jogaria os discos aleatoriamente no piso.

Se o disco depois de pousar ficasse inteiramente no interior do piso, sem tangenciar as bordas, ele receberia R$2,00 (dois reais) (R$1,00 como devolução e mais R$1,00 como prêmio).

O problema dos estudantes consistia em determinar o diâmetro d dos discos de modo que o resultado fosse favorável aos formandos, sem prejudicar demasiadamente os jogadores. Assim resolveram que um acerto de 60% favorável aos formandos seria razoável.

Posição favorável ao jogador Posição favorável aos formandos. Abaixo temos um exemplo da tabela que deverá ser exposta na lousa, pelo professor, com os resultados finais de cada grupo.

Questões:

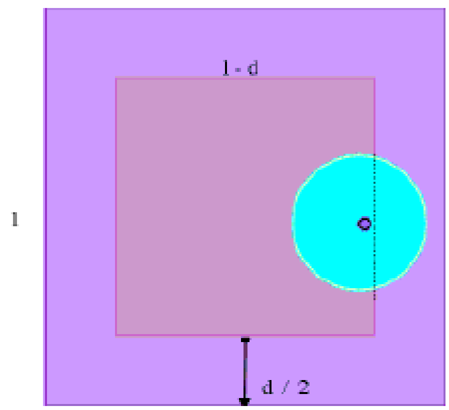
1. Como os estudantes poderão determinar o valor do diâmetro d que resulta em uma probabilidade favorável ao jogador de 40%?
Resposta: (Veja “Solução através de experimentos”)

2. Se 500 discos forem vendidos na Festa Junina, qual será o provável ganho dos formandos?
Resposta: Calcule o ganho através dos resultados obtidos na simulação, feita com 1200 discos (utilizando a tabela exposta na lousa) e faça uma regra de três para determinar o ganho no caso de 500 discos.

3. O que muda no jogo se for feita a seguinte modificação: se o bordo do disco tangenciar o lado de um quadrado, a jogada não conta, e o jogador tem direito a jogar novamente. Qual a probabilidade de ocorrer esse caso?
Resposta: P = (Quantidade de discos tangentes)/1200.

4. Construa um gráfico da probabilidade do jogador ganhar em função do diâmetro dos discos. Ao unir os pontos verifique com que curva se assemelha esta função. Resposta: (Veja “Solução através de experimentos”)

QUANTIDADE DE DISCOS
DIÂMETROS Interiores Tangentes Restante
4 cm
6 cm
8 cm
10 cm
12 cm
14 cm
TOTAL 4
5. Solução do Jogo dos Discos através do conceito de probabilidade geométrica:
Considere a seguinte fórmula:
P= Área do quadrado menor/Área do quadrado maior, sendo **p** a probabilidade do disco ficar no interior do quadrado maior (veja figura abaixo).



a) Se os quadrados do piso têm lado **l**, qual a “fórmula” para o valor de **d** que resulta numa probabilidade **p** para o jogador?
Resposta: (Veja “Solução do Problema do Jogo dos Discos”)
b) Represente o gráfico da função de **p com 0≤d≤l e l ≤ 30.** Sugestão: Suponha que **d** ≤ **l**, construa um quadrado de lado **l – d** simetricamente disposto dentro do quadrado de lado **l**. Esta figura nos sugere que o jogador ganha se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado **l – d.** Da definição de probabilidade geométrica encontre a função (fórmula), que se pede.
Resposta: (Veja “Solução do Problema do Jogo dos Discos”).

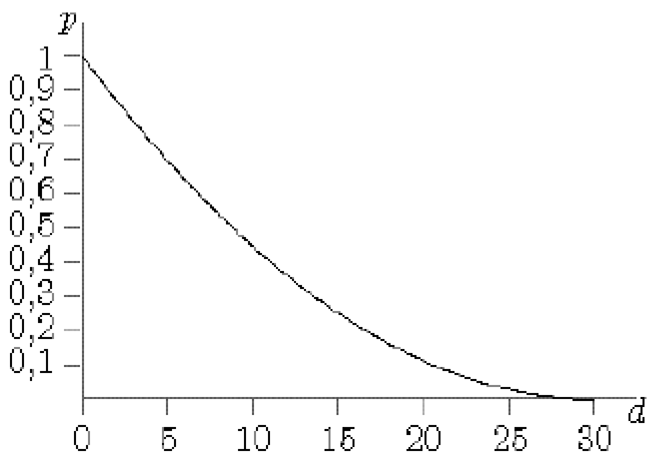
Solução do Problema do Jogo dos Discos

Se **d** ≥ **l**, a probabilidade de ocorrer um evento favorável é zero. Assuma **d < l**. Construindo um quadrado de lado **l – d** simetricamente disposto dentro do quadrado de lado (ver figura abaixo) vemos que o evento é favorável se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado **l – d** . Sob condições ideais podemos supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim a probabilidade **p** do evento ser favorável é a mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado cair dentro do quadrado de lado **l – d** .

Da definição de probabilidade geométrica tem- se:
P= Área do quadrado menor/Área do quadrado maior ou
P= $(l-d)^2/l^2$

Obtemos assim a função quadrática **P(d) = (1/l2)d2 – (2/l)d + 1,** e, para **0**≤ **d** ≤ **l** , **P(d)** é a probabilidade de um disco de diâmetro , lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um quadrado de lado . Considerando que, se **d** ≥ **l** , é zero a probabilidade de ocorrerem eventos favoráveis, tem-se:
Observe que **P(l) = 0**. Assim nada muda no problema do jogo dos discos se passarmos a considerar como favoráveis os eventos em que o disco tangencia o lado de algum quadrado.

Apresentamos abaixo o gráfico de **P(d) = (1/302)d2 – (1/15)d + 1**, em que consideramos . Observe que é um zero duplo de **P(d)**.

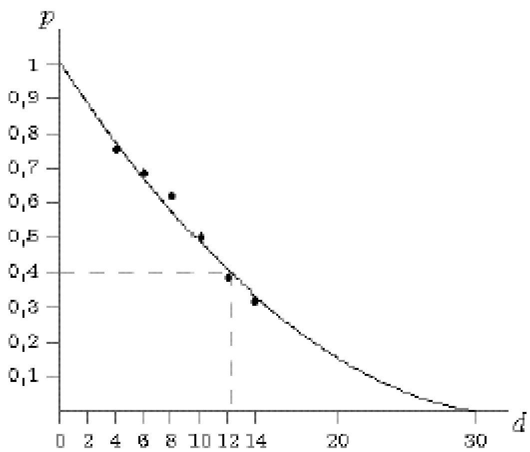


Solução através de experimentos

A solução do Jogo dos Discos através de simulação consiste em realizar um grande número de lançamentos com discos de vários diâmetros. Para cada diâmetro fazemos o quociente do número de acertos do jogador pelo número de jogadas. Colocamos os dados num gráfico cartesiano em que o eixo dos x representa o diâmetro dos discos e o eixo dos y representa a probabilidade do jogador ganhar. Unindo-se os pontos assim conseguidos obtemos uma curva que se assemelha a uma parte do gráfico de uma função quadrática **P(d)**. Através desse gráfico procuramos o valor de **d** para o qual resulta **P(d) = 40%**. Este é o valor aproximado.

Para resolver o problema por experimentação foram construídos discos de diâmetros 4, 6, 8, 10, 12 e 14 cm. Para facilitar a experiência foram feitos 5 discos de cada diâmetro. Foi observado que devem ser feitos pelo menos 200 lançamentos para cada diâmetro. Os resultados de um exemplo prático estão representados na tabela abaixo. Nesta tabela é o diâmetro dos discos, em cm, e **P** é a probabilidade do jogador ganhar. Os lançamentos foram feitos em um piso conforme sugerido pelo problema (quadrados de 30 cm de lado).

d	*P*
4	75,5%
6	68,5%
8	62%
10	50%
12	38%
14	32%



No gráfico estão dispostos os pontos obtidos. Os estudantes, usando uma folha de papel quadriculado e uma régua, desenharam a curva que lhes pareceu ser a que melhor se aproximava dos pontos dados e obtiveram a solução **d ¡Ö 11,5**. Ao fazer o gráfico foi usado o aplicativo computacional Maple V para obter a função quadrática que mais se aproxima dos pontos dados.

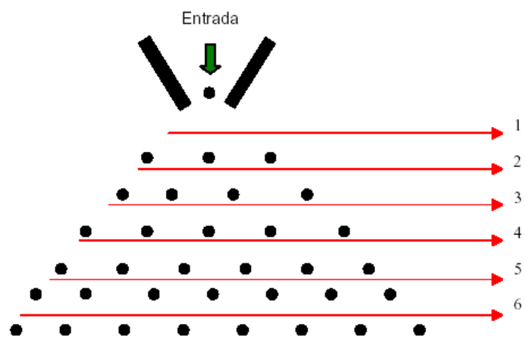
Acrescentou-se na lista dos estudantes os pontos **(0,1)** e **(30,0)**. A função obtida foi

Resolvendo a equação **P(d) = 0,4** em **d** temos **d** ¡Ö **12,2**.

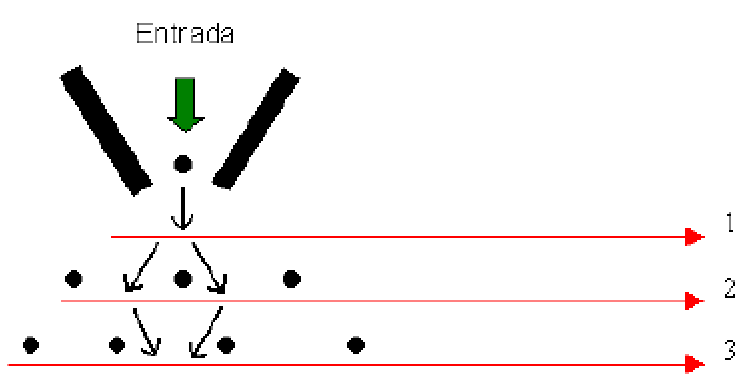
1.3. A Tábua da Fortuna .

-Roteiro do professor

Introdução teórica: O Kit “A Tábua da Fortuna” tem como objetivo motivar a construção do Triângulo de Pascal através da análise de um problema concreto que descreveremos a seguir e, ao mesmo tempo, evidenciar para os alunos a relação que existe entre Análise Combinatória e o Triângulo de Pascal.
Discussão sobre o experimento: Este texto deve ser trabalhado sob orientação do professor. Cada aluno deve receber um roteiro. A seguinte figura mostra um tabuleiro com alamedas que podem ser percorridas por uma pessoa. Podemos imaginar que é o mapa de um bosque, onde os pontos pretos representam árvores.



As várias ruas do bosque estão marcadas com setas numeradas. Em cada bifurcação as pessoas exitam entre ir para a direita ou ir para a esquerda. Somente na entrada não existe tal escolha. Para percorrer um caminho a partir da entrada, de cima para baixo, a pessoa deve decidir, em cada rua que ela passa, se toma o caminho da esquerda ou da direita. Vejamos algumas possibilidades: para atingir a rua 1, a pessoa só tem uma possibilidade. Ela é representada pelo número 1. Para chegar à rua 2, temos um caminho para a esquerda e um para a direita. Representamos tal fato escrevendo 1, 1. Na terceira linha, entretanto, temos um fenômeno novo: para atingir as posições extremas, temos apenas um caminho de cada lado, mas para a posição central temos dois caminhos distintos. Veja a figura:



Representamos o número de caminhos na terceira rua para se chegar ao extremo esquerdo, à posição central e ao extremo direito por 1, 2, 1, respectivamente. Na linha seguinte teremos 1, 3, 3, 1. Continuando desta maneira, obteremos o famoso Triângulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Em cada linha temos números representando de quantas maneiras diferentes uma pessoa pode chegar àquela posição, numa determinada rua do bosque. O número total de possibilidades de se chegar à décima linha é 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9. Podemos perceber também Possíveis caminhos para se chegar à posição central da rua 3 que o número total de possibilidades de se chegar à sétima linha é 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6 . Observe ainda que cada número do triângulo é a soma de seus dois vizinhos superiores.

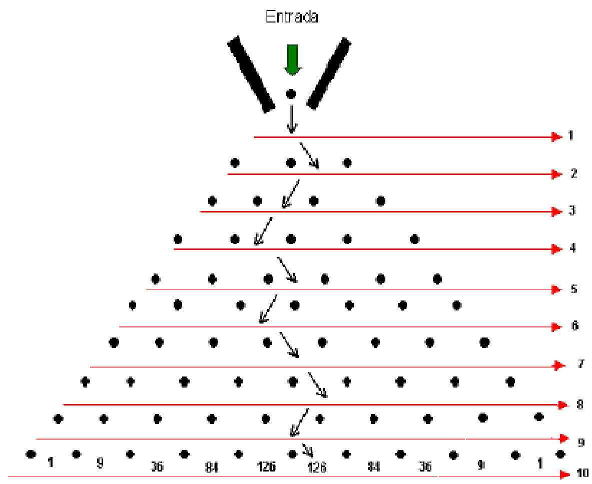
Outra Aplicação interessante de este resultado

Existe um paralelo entre este experimento e o estudo antropológico da estatura humana. A altura de um indivíduo é resultado de muitas causas que atuam no desenvolvimento físico da pessoa. Algumas destas causas tendem a fazer a estatura aumentar, enquanto outras tendem a diminuí-la.

Suponha que um indivíduo, ao lançar uma moeda, cresça se sair cara e diminua se sair coroa. Se repetirmos esses lançamentos 10 vezes com 512 pessoas, poderemos traçar um paralelo entre os caminhos no bosque descrito acima e a altura destas pessoas. A cada perda no crescimento associamos a decisão da pessoa ir à direita no bosque e a cada ganho, a decisão de seguir à esquerda. Por exemplo, se a seqüência de lançamentos for:

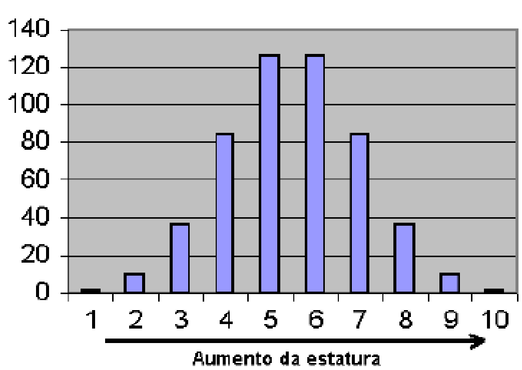
1º - independe de ser cara ou coroa (há apenas um caminho da entrada à rua 1)
2º - cara (esquerda)
3º - coroa (direita)
4º - coroa (direita)
5º - cara (esquerda)
6º - coroa (direita)
7º - cara (esquerda)
8º - cara (esquerda)
9º - coroa (direita)
10º - cara (esquerda)

Teremos a seguinte situação:



Como temos 512 pessoas, podemos exaurir todas as possibilidades dadas pelo triângulo de Pascal. Se todas elas ocorrerem, teremos, em média, uma única pessoa muita baixa, 9 indivíduos um pouco maiores, 36 um pouco ainda maiores,..., 126 pessoas com altura média, 84 com altura um pouco acima da média, e assim sucessivamente até chegarmos a uma única pessoa maior do que todas as outras. Graficamente isto pode ser representado da seguinte maneira:

Curva de Normal.



Este gráfico produz uma curva em forma de sino, conhecida como Curva de Gauss. Ela foi obtida plotando-se os números de Pascal como coordenadas. Curvas deste tipo descrevem, além da altura das pessoas, uma quantidade enorme de outros fenômenos da natureza, tais como o crescimento de bactérias, ampliação da malha rodoviária, o crescimento de plantas, etc. A seguir temos uma atividade que aborda o assunto visto. Será necessário o uso de uma fita métrica.

Atividade: Construa um gráfico de colunas colocando no eixo x as alturas de seus colegas, e no eixo y o número de pessoas com mesma altura. O que você pode concluir a partir da curva obtida?

Observação: A altura de todos os alunos da sala deverá ser colocada na lousa.

1.4. Genética e Combinatória

-Roteiro do professor-

Introdução teórica e discussão sobre o experimento: Esta atividade deve ser desenvolvida sob orientação do professor. Os alunos deverão ler atentamente o texto abaixo, respondendo as questões apresentadas. Cada aluno deverá receber um roteiro.

O binômio de Newton é uma expressão que fornece o desenvolvimento de (p+q)n, quando n é um número natural. Vejamos alguns casos particulares:
(p+q)1 = p + q
(p+q)2 = p2 + 2 p q + q2
(p+q)3 = p3 + 3 p2 q + 3 p q2 + q3
(p+q)4 = p4 + 4 p3 q + 6 p2 q2 + 4 p q3 + q4
Observamos que os coeficientes obtidos nos membros direitos formam os primeiros números do triângulo de Pascal. A expressão geral do binômio de Newton é:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

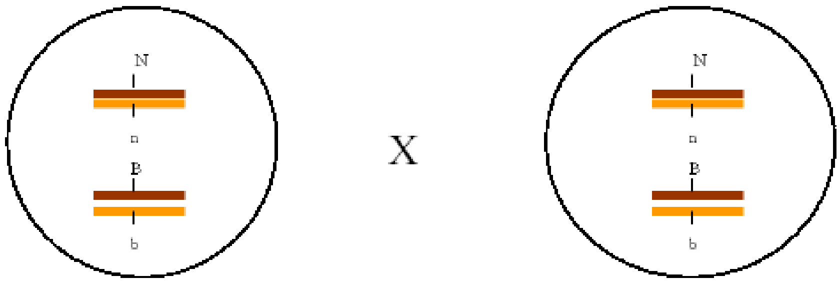
Deste modo os termos que comparecem no Triângulo de Pascal são precisamente os coeficientes binomiais:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

C (n, k) é o número de combinações de n elementos, em k (k-ésimo número da n-ésima linha do Triângulo de Pascal) grupos.

Aplicações a genética e a herança quantitativa A cor da pele::

A cor da pele humana é resultado da concentração de um pigmento marrom chamado melanina a qual é determinada por no mínimo dois pares de genes, que indicaremos pelas letras Nn e Bb. Aqui N e B determinarão uma grande quantidade de melanina (são os alelos efetivos) e n e b uma pequena quantidade (alelos não efetivos). Com isto em mente, as pessoas NNBB serão negras e as nnbb serão brancas. Entre estes dois extremos teremos os mulatos com suas nuances: escuro, médio e claro. Os cruzamentos possíveis entre um casal de mulatos médios estão representados esquematicamente abaixo:



Negro

Pai → Mãe ↓	NB	Nb	nB	nb
NB	NNBB Negro	NNBb Mulato escuro	NnBB Mulato escuro	NnBb Mulato médio
Nb	NNBb Mulato escuro	NNbb Mulato médio	NnBb Mulato médio	Nnbb Mulato claro
nB	NnBB Mulato escuro	NnBb Mulato médio	nnBB Mulato médio	nnBb Mulato claro
nb	NnBb Mulato médio	Nnbb Mulato claro	nnBb Mulato claro	nnbb Branco

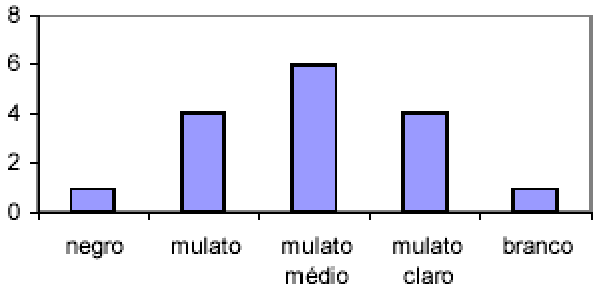
NN

Proporção dos fenótipos:
Negro: 1/16
Mulato escuro: 4/16
Mulato médio: 6/16
Mulato claro: 4/16
Branco: 1/16
Como esperado, há concentração maior em torno da média.

Questões:

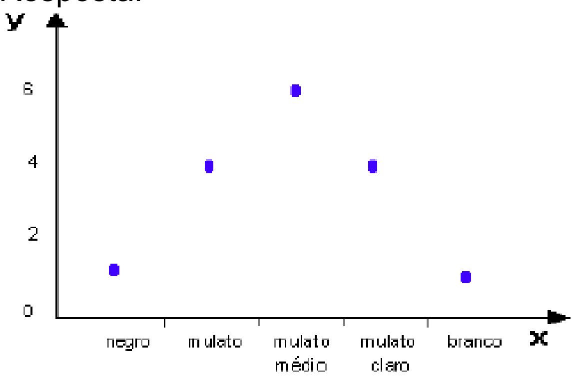
a) Compare os resultados obtidos no cruzamento acima com o Triângulo de Pascal.
Resposta: Os números da proporção fenotípica obtida (1 : 4 : 6 : 4 : 1) correspondem à 4ª linha do Triângulo de Pascal.
b) Faça um histograma (gráfico de colunas) com estes resultados.

Resposta:



c) Faça um gráfico com os pontos que relacionam a cor da pele no eixo x e o número de indivíduos correspondente no eixo y. Verifique se estes pontos formam
a curva normal de Gauss e tire suas conclusões.

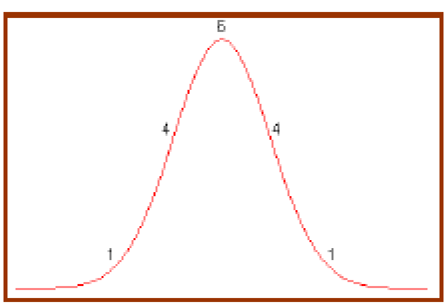
Resposta:



Os pontos formam a curva normal de Gauss.ou **1 : 4 : 6 : 4 : 1**

Comentários sobre a atividade relacionada à cor da pele

Os números obtidos no numerador das proporções 1, 4, 6, 4, 1 formam a quarta linha do triângulo de Pascal e, quando colocados em um gráfico formam pontos sobre a curva normal de Gauss:



Se denotarmos por p os alelos efetivos (N e B), por q os alelos não efetivos (n e b) e desenvolvermos o binômio de Newton com n = 4 (número total de letras que representam os alelos), obteremos:

$$(p+q)^4 = 1\,p^4 + 4\,p^3q + 6\,p^2q^2 + 4\,pq^3 + 1\,q^4$$

1 negro NNBB

4 mulatos escuros NNBb ou NnBB

6 mulatos médios NnBb ou NNbb ou nnBB

4 mulatos claros Nnbb ou bnBb

1 branco nnbb

Note que além dos coeficientes darem as proporções, os expoentes podem ser interpretados da seguinte maneira: p4 significa a presença de 4 alelos efetivos, p3q a presença de 3 alelos efetivos e 1 não efetivo, e assim por diante. Você ainda deve se lembrar que os coeficientes da expansão binomial podem ser obtidos diretamente do triângulo de Pascal.

1.5. Jogando e ganhando

-Roteiro do professor-

Discussão sobre o experimento: A sala deverá ser dividida em grupos de 4 alunos. Cada grupo trabalhará com 2 dados. Os alunos deverão ler o texto a seguir, completar as tabelas e responder as questões, sob a supervisão do professor.

Você tem em suas mãos dois dados que devem ser jogados simultaneamente. Cada jogador escolhe um número do conjunto {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} e faz sua aposta.

Se a soma dos números mostrados nas faces de cima dos dados for o número escolhido, o jogador ganha um ponto. A sorte está lançada! Vence quem fizer o maior número de pontos. Anote com um X na tabela abaixo os resultados encontrados nos dados.

		Número do primeiro dado					
Número do segundo dado	----	1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Cada jogador deverá fazer 10 lançamentos, anotando na tabela abaixo quantas vezes cada soma saiu:

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de vezes											

Lembremos que a probabilidade de um evento ocorrer é o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Assim, a probabilidade da soma ser 2 é 1/36, isto é, das 36 possibilidades para a soma, somente 1 é favorável (quando os dois dados apresentarem simultaneamente 1 na face de cima).

Observe também que a possibilidade de não ocorrer a soma 2 é de **35 /36** , ou seja, **1- 1/36**

Questões:

1) Qual a probabilidade da soma ser 12?

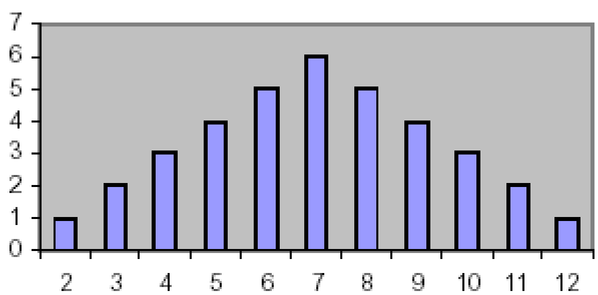
Resposta:**1/ 36** (ou seja, quando os dados apresentarem simultaneamente o número 6 na face de cima).

2) Em qual número se deve apostar para ter a maior probabilidade de vencer? Por quê?

Resposta: No número 7. A probabilidade da soma ser 7 é **1/ 6** (é a maior se comparada com as demais somas).

3) Desenhe um histograma colocando no eixo-x as somas de 2 a 12 e no eixo-y o denominador das probabilidades de ocorrência de cada soma.

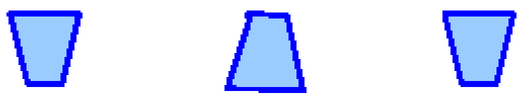
Resposta:



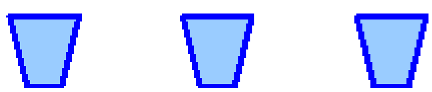
1.6. Sinal de Permutação

-Roteiro do professor-

Introdução teórica: Podemos associar a uma permutação um sinal positivo (+) ou negativo (-), obtido contando-se o número de transposições (isto é, a troca da posição de dois elementos) necessárias para se obter a permutação. Para exemplificar, consideremos as permutações dos números 1, 2 e 3:
1 2 3 - terá sinal (+) pois nenhuma troca foi feita.
2 1 3 - terá sinal (-) pois houve apenas uma troca (do 1 com o 2).
2 3 1 - terá sinal (+) pois trocamos o 1 com o 2 e, posteriormente, o 3 com o 1.
Uma permutação é sempre obtida por meio de uma série de transposições simples. Se ela for obtida por meio de um número par de transposições, seu sinal será **+**, e se for obtida por um número ímpar de transposições, seu sinal será **-** . O número de transposições de uma permutação pode mudar, mas a paridade não. Questões que envolvem paridade servem muito freqüentemente para provar a impossibilidade de alguma tarefa. Para exemplificar um destes fenômenos, veja o desafio abaixo. **Discussão sobre o experimento:** Inicialmente, a sala deverá ser dividida em grupos de, no máximo, 4 alunos. Cada grupo trabalhará com 3 copinhos plásticos. Os alunos deverão ler atentamente o texto, com o acompanhamento do professor. Em seguida, deverão responder as questões propostas. Sugere-se que o professor formule e apresente novos casos para os alunos solucionarem.
1º caso) Coloque três copinhos plásticos sobre a mesa, de acordo com a configuração abaixo:



Virando simultaneamente 2 desses copos, tente deixar os 3 com a boca para baixo. A solução é muito simples, basta virar o primeiro e o último copo. Tente uma segunda solução (isto pode ser feito virando-se, por exemplo, o primeiro e o segundo copo e, a seguir, o segundo juntamente com o terceiro).
2º caso) Coloque os três copos agora da seguinte forma:

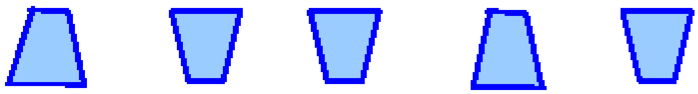


Virando-se simultaneamente 2 copos, tente deixar os 3 com a boca para baixo. Depois de algumas tentativas, a tarefa vai se revelar impossível. Como sabemos disto?
Associe ao copo com a boca virada para cima o número (+1) e ao copo virado para baixo o valor (-1). Assim, no primeiro caso apresentado acima, os copinhos tinham a configuração (+1) (-1) (+1).
Para que os três copos fiquem virados para baixo devemos obter a configuração (-1) (-1) (-1). Veja o que ocorre com o produto dos três números, antes e depois da virada, respectivamente:
(+1) . (-1) . (+1) = -1

(-1) . (-1) . (-1) = -1

Observe que não temos a alteração do sinal deste produto ao virarmos simultaneamente dois copos. Logo, o primeiro caso tem solução. No segundo caso, a configuração inicial era (+1) (+1) (+1). O produto desses três números é (+1). Este produto não se altera quando viramos simultaneamente dois copos (verifique esta afirmação). Dessa forma o produto nunca será (-1) e o problema não tem solução.

Questão: Considere a figura abaixo. Virando-se simultaneamente dois copos, é possível colocar os 5 com a boca virada para cima?



Resposta: Sim. Observe que a configuração inicial é (-1) (+1) (+1) (-1) (+1), cujo produto é (+1). Se os 5 copinhos estiverem com a boca virada para cima o produto também é igual a (+1). Logo, o problema tem solução.

1.7. Futebol e os Cartolas

-Roteiro do Professor-

Discussão sobre o experimento: Os alunos deverão ler o texto abaixo e responder as questões apresentadas. Cada aluno deverá receber um roteiro.
Você deve organizar um torneio de futebol em dois turnos com quatro times: Palmeiras, São Paulo, Corinthians e Santos. Cada time deverá enfrentar os 3 outros duas vezes: uma vez no seu campo e outra vez no campo adversário.
Preencha o quadro de programação dos jogos:
(o quadro abaixo foi preenchido como um exemplo para o professor)

Primeiro Turno

JOGO 1

Palmeiras	X	São Paulo
	Placar:	
2		2

JOGO 2

Palmeiras	X	Corinthians
	Placar:	
1		3

JOGO 3

Palmeiras	X	Santos
	Placar:	
1		2

JOGO 4

São Paulo	X	Corinthians
	Placar:	
0		1

JOGO 5

Corinthians	X	Santos
	Placar:	
2		1

JOGO 6

Santos	X	São Paulo
	Placar:	
0		0

Segundo Turno

JOGO 1

São Paulo X *Palmeiras*

Placar:

3 1

JOGO 2

Corinthians X *Palmeiras*

Placar:

4 2

JOGO 3

Santos X *Palmeiras*

Placar:

3 0

JOGO 4

Corinthians X *São Paulo*

Placar:

1 1

JOGO 5

Santos X *Corinthians*

Placar:

2 0

JOGO 6

São Paulo X *Santos*

Placar:

2 3

Observação: Considere que os times que estão à direita em cada partida programada acima joguem em seu campo e os que estão à esquerda, no campo adversário.

COPA DOS CAMPEÕES	Palmeiras	São Paulo	Corinthians	Santos
Palmeiras	-----	*Jogo 1 (1º turno)*	*Jogo 2 (1º turno)*	*Jogo 3 (1º turno)*
São Paulo	*Jogo 1 (2º turno)*	-----	*Jogo 4 (1º turno)*	*Jogo 6 (1º turno)*
Corinthians	*Jogo 2 (2º turno)*	*Jogo 4 (2º turno)*	-----	*Jogo 5 (1º turno)*
Santos	*Jogo 3 (2º turno)*	*Jogo 6 (2º turno)*	*Jogo 5 (2º turno)*	-----

Questões:

1. Quantos jogos devem ser realizados?

Resposta: Devemos fazer a combinação dos 4 times 2 a 2 no primeiro turno e outra vez no segundo turno. Como:

$$2.C(4,2) = 2\frac{4!}{2!2!} = 12,$$

deverão ser realizados um total de 12 jogos.

2. Coloque em cada uma das partidas um placar provável. Levando em conta que a vitória vale 2 pontos, o empate 1 ponto e a derrota 0 pontos, qual será o time vencedor?
Resposta:

Times	Jogos	Pontos	Total
São Paulo	1 (1º turno)	1	7
	4 (1º turno)	0	
	6 (1º turno)	1	
	1 (2º turno)	2	
	4 (2º turno)	1	
	6 (2º turno)	2	
Palmeiras	1 (1º turno)	1	1
	2 (1º turno)	0	
	3 (1º turno)	0	
	1 (2º turno)	0	
	2 (2º turno)	0	
	3 (2º turno)	0	
Corinthians	2 (1º turno)	2	9
	4 (1º turno)	2	
	5 (1º turno)	2	
	2 (2º turno)	2	
	4 (2º turno)	1	
	5 (2º turno)	0	
Santos	3 (1º turno)	2	7
	5 (1º turno)	0	
	6 (1º turno)	1	
	3 (2º turno)	2	
	5 (2º turno)	2	
	6 (2º turno)	0	

O time vencedor é o Corinthians.

3. Suponha agora que você fosse organizar um campeonato com 24 times. Todos os times devem jogar entre si duas vezes, uma vez no seu campo e outra vez no campo do adversário. Qual o número total de partidas que serão realizadas?
Resposta: Devemos fazer a combinação dos 24 times 2 a 2 no primeiro turno e no segundo turno. Como:

$$2.C(24,2) = 2\frac{24!}{22!2!} = 276$$

Deverão ser realizados uns totais de 276 jogos.

1.8. PERMUTAÇÕES SIMPLES

-Roteiro do professor-

Exemplo:
QUANTOS NÚMEROS, DE 3 ALGARISMOS DISTINTOS, PODEMOS FORMAR COM OS DÍGITOS 7, 8 E 9?
Temos o conjunto A = {7, 8, 9} e, usando cada elemento de A apenas uma vez em cada um dos agrupamentos, devemos formar números com 3 algarismos.

Teremos que usar todos os elementos de A e formar agrupamentos que serão distinguidos apenas pela ordem em que aparecem. Estes agrupamentos são chamados permutações dos 3 elementos de A.

As permutações dos 3 elementos de A são as ternas ordenadas (7, 8, 9), (7, 9, 8), (9, 8, 7), (9, 7, 8,), (8, 7, 9), (8, 9, 7), ou seja, são os seis números que podemos formar:
789, 798, 987, 978, 879, 897.

Questão:
Resposta: O primeiro carro tem 6 opções para estacionar, o segundo 5, o terceiro 4, o quarto 3, o quinto 2 e o sexto apenas 1. Logo as possibilidades são em número de 6! =
6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720.
A partir das idéias desenvolvidas acima podemos descrever o que é Permutação:

Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 garagens?

Seja **A** um conjunto com **n** elementos. **Permutações do conjunto A** são agrupamentos em que cada elemento de A comparece uma só vez e onde apenas a ordem em que esses elementos aparecem distingue os agrupamentos. Ou seja, duas permutações são consideradas distintas se a ordem em que aparecem os elementos do conjunto não for a mesma.

1.9. ARRANJOS SIMPLES

-Roteiro do professor-

Exemplo: Usando-se os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números diferentes com dois algarismos podemos formar?

A ordem é fundamental, pois números com dígitos trocados não são os mesmos. Os algarismos podem, entretanto, repetir-se para a formação de um número. Podemos, neste caso simples, listar os números que são pedidos. São eles: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45.

Questão 1: Quatro times de futebol disputam um torneio, onde são atribuídos prêmios ao campeão e ao vicecampeão. De quantos modos os prêmios podem ser atribuídos?

Resposta: Há 4 possibilidades para o campeão do torneio e 3 possibilidades para o vicecampeão, ou vice-versa. Logo existem 12 modos em que os prêmios podem ser distribuídos.

Note que nos exemplos dados, temos sempre de fazer uma escolha de p objetos entre n objetos, onde p < n, e a ordem em que fazemos a escolha determina objetos diferentes. De fato, problemas do tipo considerado nos últimos exemplos aparecem tão freqüentemente que recebem um nome especial: **arranjo simples de p elementos em n**.

O número total de tais arranjos será denotado por A(n,p) (lê – se arranjos de n elementos p a p). Usando o princípio multiplicativo, vamos obter A(n,p). Basta raciocinar da seguinte maneira:
Com n objetos, queremos preencher p lugares.
Lugar 1 Lugar 2 Lugar 3 **. . .** Lugar p

O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras distintas, o segundo de n – 1 maneiras, o terceiro de n – 2 maneiras e assim sucessivamente até o p-ésimo lugar, que
pode ser preenchido de n – (p + 1) modos diferentes. Pelo Princípio Multiplicativo,
$A(n,p) = n \, . \, (n – 1) \, . \, (n – 2) \, . \, (n – 3). \, ... \, . \, (n – (p – 1)) = n! / (n – p)!$

Observe que toda permutação é um arranjo (caso em que p = n). Assim, para que a fórmula acima faça sentido também nesse caso, definimos 0! = 1.
Utilizando agora a definição de arranjo, resolva os seguintes problemas:

Questão 2: Um anagrama é uma combinação qualquer de letras. Quantos anagramas de duas letras podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

Resposta: A ordem é importante aqui e, portanto, a solução é dada pelos arranjos de 23
elementos dois a dois:

$A(n,p) = 23! / 21! = 506$

Questão 3: Considere agora a palavra LIVRO. (a) Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra? (b) Quantos deles começam por L e terminam por O? (c) Quantos contêm as letras RO juntas e nessa ordem?

Resposta:
a) A(5,5) = 5! / 0! = 5.4.3.2.1 = 120 anagramas.

(b) Tais agrupamentos são do tipo: L _ _ _ O . Logo temos A(3,3) = 3. 2. 1 = 6 anagramas.
(c) Se as letras RO ficarem juntas, nessa ordem, temos:
R O _ _ _ . As letras RO são contadas como sendo uma só letra e, junto com as três letras restantes, teremos um total de 4 letras para serem agrupadas 4 a 4. Assim, obtemos:

A(4,4) = 4 . 3. 2 . 1 = 24 anagramas.

Questão 4: Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números pares distintos maiores que 100 (estritamente) e menores que 1000 (estritamente), podemos formar?

Resposta: Os números entre 100 e 1000 são constituídos por 3 dígitos. Devemos preencher as casas das unidades, das dezenas e das centenas. A casa das unidades só pode ser preenchida pelos algarismos 2 ou 4, pois queremos números pares. As casas das dezenas e das centenas podem ser preenchidas de qualquer modo, mas não devemos utilizar o dígito já empregado na casa das unidades. O melhor é utilizar o Princípio Aditivo dividindo-se o problema em dois casos disjuntos:

Caso 1: O dígito das unidades é 2. Neste caso, as casas das centenas e das unidades podem ser preenchidas com os dígitos 1, 3, 4 e 5. Existem

A(4,2) = 4! / 2! maneiras de se fazer isto.

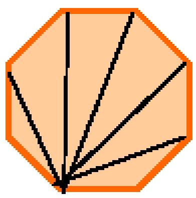
Caso 2: O dígito das unidades é 4. Existem também 12 maneiras de se fazer isto, pois só podemos utilizar os dígitos 1, 2, 3 e 5.
Pelo Princípio Aditivo, o número total de possibilidades é 12 + 12 = 24.

1.10. Combinações simples

-Roteiro do professor-

Exemplo 1: Quantos subconjuntos de 3 elementos possui o conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5}?

Exemplo2 : Quantas diagonais podemos traçar em um polígono regular de oito lados? Após resolver este problema, você poderia dizer quantas diagonais tem um polígono de n lados?



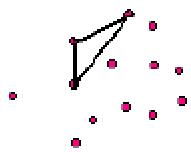
Como a ordem para a formação de subconjuntos não é importante, basta combinarmos 5 elementos 3 a 3. Assim, o número de subconjuntos é: {(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (3,4,5)} Observe a figura acima.O vértice assinalado pode ser ligado a qualquer outro não adjacente por meio de uma diagonal. Cada vértice pode gerar então 5 = 8 – 3 diagonais. Como existem 8 vértices teremos 8 . 5 = 40 diagonais. Entretanto, agindo desta forma, contamos duas vezes uma mesma diagonal pois o segmento que liga um ponto P a outro Q é o mesmo que liga Q a P. Devemos então dividir o resultado por 2. Assim:
8 .5 / 2 = 20
é o número total de diagonais de um polígono regular de 8 lados. Para um polígono de n teremos:
n. (n-3) / 2 diagonais

Considere um conjunto A com n elementos. Agrupamentos com p (p ≤n) elementos, onde cada elemento de A comparece uma só vez e onde a ordem não é importante, são subconjuntos de A chamados **combinações dos n elementos de A, p a p**.

Sabemos que o número de grupos formados com p elementos, considerando diferentes grupos com ordens distintas, é igual ao número de permutações com p elementos, que sabemos que é igual a p!. Para se obter C(n,p), basta dividir o número de arranjos A(n,p) pelo número de permutações de p elementos, isto é, por p!. Assim:
C(n,p) = A(n,p) / p! ⇒ C(n,p) = n! / p! (n- p)!

Utilizando agora a definição de combinação, resolva os seguintes problemas:

Questão 1: Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, supondo que não há três destes pontos alinhados?



Resposta: Como não existem três pontos sobre a mesma linha, basta escolhermos 3 pontos quaisquer e traçar um triângulo com esses vértices. O número total de triângulos que podemos traçar é:
C(14,3) = 14! / 3! .11! = 364

Questão 2: De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Resposta: O primeiro grupo pode ser formado de C(8,4) modos diferentes. Escolhido o primeiro grupo, só existe uma maneira de se escolher o segundo grupo. Entretanto, procedendo desta maneira contamos as divisões {a, b, c, d} {e, f, g, h} como sendo diferente da divisão {e, f, g, h} {a, b, c, d}. Assim, a resposta correta é:

C(8,4) / 2 = 35

Questão 3: Considere o conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5}. De quantos modos podemos formar subconjuntos de C com dois elementos nos quais não haja números consecutivos?

Resposta: Este problema pode ser resolvido enumerando-se todas as possibilidades. São elas: {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 4}, {2, 5} e {3, 5}. Existem então seis maneiras de se obter os subconjuntos. Este modo de resolver, entretanto, não pode ser facilmente generalizado para conjuntos maiores.
Vamos marcar com os elementos que farão parte do subconjunto e com os elementos que não farão parte. Por exemplo:

{1, 3} ficará representado por ⊕ ∅ ⊕ ∅ ∅
{2, 5} ficará representado por ∅ ⊕ ∅ ∅ ⊕

O subconjunto {1, 2} não serve pois apresenta dois inteiros consecutivos. Sua representação no entanto é : ⊕ ⊕ ∅ ∅ ∅
Para formar um subconjunto com dois elementos não consecutivos, devemos colocar três sinais ∅ e dois sinais ⊕, sem que apareçam dois sinais lado a lado. Para isto, colocamos três sinais ∅, deixando espaços entre eles para serem preenchidos ou não por dois símbolos ⊕.

	∅		∅		∅	

Devemos escolher duas das quatro posições vazias da tabela acima. Dessa forma, teremos C(4,2) = 6 possibilidades de se obter subconjuntos sem elementos consecutivos, confirmando nossa primeira solução.

Este exemplo pode agora ser generalizado. O conjunto {1, 2, ..., n} tem C(n, n – p + 1) subconjuntos com p elementos onde não aparecem números consecutivos. A demonstração é idêntica a anterior.

1.11. Contar com repetição

-Roteiro do professor-

Como conseqüência do Princípio Multiplicativo, obtivemos maneiras efetivas de contar o número de permutações, de arranjos e de combinações simples. Nesta seção estaremos interessados em aprofundar o nosso estudo, incorporando aplicações onde a repetição de elementos é permitida.

Uma aplicação em que as repetições aparecem na contagem e que serve para a formulação de muitos modelos matemáticos de situações do mundo real, refere-se ao problema de contar o número total de soluções inteiras positivas de uma equação do tipo:

x1 + x2 + ... + xn = m

Exemplo 1: Qual é o número total de soluções inteiras e positivas de **x1 + x2 = 5** ?

Este problema é tão simples que podemos enumerar todas as possibilidades. São elas:

x1	**x2**
1	4
2	3
3	2
4	1

Não consideramos aqui a possibilidade de um dos termos ser zero. Obtemos assim 4 soluções. Se algum dos termos pudesse ser zero, obteríamos mais duas soluções **x1 = 0, x2 = 5** e **x1 = 5, x2 = 0**.

Dificilmente a enumeração de todas as soluções pode, entretanto, ser generalizada.

Solução Esperta: Escrevemos o número 5 na forma unária, representando cada unidade por uma barra:| | | | | . Com essa notação as soluções positivas são:

+			
	+		
		+	
			+

Isso corresponde a colocar o sinal de + entre duas barras | |. Tal tarefa pode ser feita através de C(4,1) = 4 maneiras diferentes. Será que esta técnica também funciona em outros exemplos?

Exemplo 2: Quantas soluções positivas tem a equação **$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 9$** ?| | | | | | | | |
Existem 9 – 1 = 8 lugares para se colocar o sinal +. Para repartir 9 em cinco partes devemos escolher 5 – 1 = 4 desses 8 lugares para colocarmos sinais de +. Já que os sinais de + são todos iguais, podemos fazer isto sem nos preocuparmos com a ordem deles. Assim, o número total de soluções da equação é C(8,4) = 70.

Resultado Geral:

O número de soluções positivas da equação $x1 + x2 + ... + xn = m$ é C(m-1, n-1)

Exemplo 3:

Qual é o número de soluções inteiras positivas ou nulas da equação **$x1 + x2 + ... + xn = m$**?

Façamos um pequeno truque, introduzindo a mudança **$yi = xi + 1$**. Com isto, recaímos no caso anterior que já resolvemos. Como

$x1 + x2 + ... + xn = m$,

somando 1 a cada **xi** obteremos **$(x1 + 1) + (x2 + 1) + ... + (xn +1) = m + n$,** ou seja, **$y1 + y2 + ... + yn = m + n$.** O número de soluções positivas desta última equação é igual ao número de soluções positivas ou nulas de **$x1 + x2 + ... + xn = m$**. Pelo resultado gera obtido acima este número é C(m+n-1, n-1).

<u>1.12. Permutações com repetição</u>

-Roteiro do professor-

<u>**Problema do Hotel**</u>**: Estávamos viajando em 3 pessoas e resolvemos parar e pernoitar em um hotel. No hotel havia somente 2 quartos vagos, o quarto A com capacidade para 2 pessoas e o quarto B que alojava somente uma pessoa. Quantas são as distribuições que podemos fazer para nos acomodarmos nestes dois quartos?**

É fácil enumerar todas as possibilidades. São elas

• As pessoas P1 e P2 ficam no quarto A e P3 no quarto B, ou
• as pessoas P1 e P3 ficam no quarto A e P2 no quarto B, ou
• as pessoas P2 e P3 ficam no quarto A e P1 no quarto B.

Existem, portanto três possibilidades.

Poderíamos ter raciocinado da seguinte maneira: devemos colocar 2 pessoas no quarto A e isto corresponde a escolher 2 entre 3. Portanto, existem C(3,2) = 3 possibilidades de escolha. Uma vez que as duas pessoas estejam acomodadas no quarto A, só existe uma possibilidade de acomodar a terceira pessoa no quarto B. Ao todo, teremos 3 possibilidades. Este procedimento pode ser generalizado:

Problema do Hotel com variações:

Um hotel possui três quartos vagos A, B e C. Quantas possibilidades de acomodação existem para 7 pessoas nos três quartos, sendo que no quarto A cabem 3 pessoas e nos quartos B e C cabem 2 pessoas?

Existem C(7,3) maneiras de três pessoas ocuparem o quarto A. Uma vez feito isto, existem C(4,2) maneiras de se ocupar o quarto B, restando somente uma maneira de se ocupar o terceiro quarto. Logo a quantidade total de possibilidades é:

C(7,3). C(4,2). C(2,2) = 7! / 3!4! . 4! / 2!2! . 2! / 2!0! = 210

Questão 1:

Resposta: Existem C(7,2) maneiras de duas pessoas cuidarem do jardim, restando somente uma opção para as outras cinco pessoas, que é a de pintar a casa. Logo, a quantidade total de possibilidades é:

C(7,2) . C(5, 5) = 21 . 1 = 21.

Questão 2: Quantos anagramas podemos formar com a palavra **ARARAQUARA**?

Resposta: Devemos arrumar 5 letras A, 3 letras R, 1 letra Q e 1 letra U em 10 lugares diferentes. Ao todo teremos:

C(10,5) . C(5,3) . C(2,1) . C(1,1) = 5040 possibilidades.

Uma família de 7 pessoas decide executar duas tarefas: duas delas vão cuidar do jardim,

enquanto as outras vão pintar a casa. De quantos modos as tarefas podem ser distribuídas?

1.13. Arranjos com repetição

-Roteiro do professor-

Exemplo:

Questão 1: Qual é o número total de anagramas que juntando três letras quaisquer de um alfabeto de 23 letras?

O número total é 23^3 anagramas, começando com AAA e terminando com ZZZ. As letras em código Morse são formadas por seqüências de traços (-) e pontos (**.**), sendo permitidas repetições. Por exemplo: (-, **.** , -, -, **.** , **.**).

Quantas letras podem ser representadas:

a. Usando exatamente 3 símbolos?

Resposta: Para cada um dos três símbolos temos duas possibilidades, ou seja, 2 . 2 . 2 = 23 = 8 possibilidades.

b. Usando no máximo 8 símbolos?

Resposta: Variando a quantidade de símbolos, temos as seguintes possibilidades:

com 1 símbolo $\Rightarrow$ 2 possibilidades,

com 2 símbolos $\Rightarrow$ 2^2 = 4 possibilidades,

com 3 símbolos $\Rightarrow$ $2^3 = 8$ possibilidades,
com 4 símbolos $\Rightarrow$ $2^4 = 16$ possibilidades,
com 5 símbolos $\Rightarrow$ $2^5 = 32$ possibilidades,
com 6 símbolos $\Rightarrow$ $2^6 = 64$ possibilidades,
com 7 símbolos $\Rightarrow$ $2^7 = 128$ possibilidades,
com 8 símbolos $\Rightarrow$ $2^8 = 256$ possibilidades.
Portanto, com 8 símbolos obteremos, no máximo,
$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510$ possibilidades.

Questão 2: Quantos números telefônicos, com 7 dígitos, podem ser formados se usarmos os dígitos de 0 a 9?
Resposta: Cada número telefônico consiste em uma seqüência de 7 dígitos do tipo:
(a1, a2, a3,..., a6, a7) em que a1 $\in$ A1 = {0, 1, 2, ..., 9}
a2 $\in$ A2 = {0, 1, 2, ..., 9}
. . .
a7 $\in$ A7 = {0, 1, 2, ..., 9}
Logo, o número de seqüências é 107 = 10 000 000.

Questão 3: Em um baralho de 52 cartas, cinco cartas são escolhidas sucessivamente. uantas são as seqüências de resultados possíveis:

a. Se a escolha for feita com reposição?
Resposta: O número de seqüências é: 52 . 52 . 52 . 52 . 52 = 525.

b. Se a escolha for feita sem reposição?
Resposta: O número de seqüências é: 52 . 51 . 50 . 49 . 48 = 311 875 200.

1.14. Combinações com repetição

-Roteiro do professor-

Problema do parque de diversões:
Um menino está em um parque de diversões, onde há 4 tipos de brinquedos:
C – chapéu mexicano
F – trem fantasma
M – montanha russa
R – roda gigante
O menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele pode comprar 2 bilhetes iguais para ir num mesmo brinquedo?
Resolução: É possível resolver este problema enumerando todas as possibilidades. São elas:

CC CF CM CR
FF FM FR
MM MR
RR

Observe que aí estão listadas todas as possibilidades e que CF é igual a FC, não importando a ordem do primeiro com o segundo bilhete, mas incluindo repetições. Se não fossem permitidas repetições o resultado seria C(4,2) = 6 (neste cálculo não se inclui a hipótese do menino comprar dois bilhetes repetidos). O número correto de possibilidades é 10 = 6 + 4 (quatro repetições foram adicionadas).

Resolução esperta: Sejam

X_1 o número de bilhetes de C (chapéu mexicano),
X_2 o número de bilhetes de F (trem fantasma),
X_3 o número de bilhetes de M (montanha russa) e
X_4 o número de bilhetes de R (roda gigante).

Como o número total de bilhetes que o menino quer comprar é 2, temos

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2$

O número de soluções inteiras e não negativas desta última equação é

$C(4+2-1,4-1) = C(5,3) = 10$.

Basta comparar agora as duas soluções apresentadas.

Este segundo método de resolução pode ser facilmente generalizado.

	X_1	X_2	X_3	X_4
CC	**2**	**0**	**0**	**0**
CF	**1**	**1**	**0**	**0**
CM	**1**	**0**	**1**	**0**
CR	**1**	**0**	**0**	**1**
FF	**0**	**2**	**0**	**0**
FM	**0**	**1**	**1**	**0**
FR	**0**	**1**	**0**	**1**
MM	**0**	**0**	**2**	**0**
MR	**0**	**0**	**1**	**1**
RR	**0**	**0**	**0**	**2**

A linha FM diz que foram comprados dois bilhetes: um para o trem fantasma (F) e um para montanha russa (M).

Questão: Com 2 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 3 vasos idênticos, pintando cada vaso de uma única cor? Resolva o mesmo problema com 4 cores e 5 vasos.

Resposta: Os três vasos podem ser pintados de uma mesma cor. Estamos novamente com um problema de combinações com repetição.

Se x1 é o número de vasos pintados de branco e x2 é o número de vasos pintados de preto, então x1 + x2 = 3. O número de soluções positivas ou nulas desta equação é C(3+2-1, 2-1) = C(4,1) = 4.
No caso de 4 cores e 5 vasos, o número de combinações possíveis é igual ao número de soluções positivas ou nulas de x1 + x2 + x3 + x4 = 5, que é dado por C (4 + 5 - 1, 4 - 1) = C (8, 3) = 56.

2. OFICINAS DE MATEMÁTICA

2.1. Brincando com a Matemática

Nível: Ensino Médio

Objetivo Geral: Trabalhar conceitos básicos envolvendo a lógica, o cálculo e a geometria usando a manipulação de jogos matemáticos de maneira lúdica e agradável.

Problematizações possíveis: A problematização estará ligada a cada um dos jogos expostos na mesa. Conteúdos associados a cada jogo:

Tangram: Geometria Plana: Aprofundar os conceitos de lados, ângulos, perímetro, área, congruência e semelhança, e o Teorema de Pitágoras; Lógica: Formar várias figuras com as sete peças do tangram; Aritmética: Aprofundar o conceito de fração, fração equivalente e operações, tais como adição e subtração.

Tangram Circular: Geometria plana: Aprofundar conceitos sobre circunferência e círculo, área do circulo, comprimento da circunferência e suas partes, concordância de arcos.

Tangram oval : Geometria plana: Conhecer concordância de arcos, com triângulos.

Jogo da Velha 3D Lógica: Verificar situações de ganho e perda no espaço tridimensional.

Utilizar conceitos de geometria no espaço · Cubo da soma Geometria plana: Reconhecer o cubo como o poliedro de seis faces (hexaedro) e associar, ao mesmo, a idéia algébrica do cubo da soma. Utilizar conceitos de poliedros regulares e geometria no espaço (Prisma, cubo, altura, volume área lateral e área total).

Geoplano: Geometria plana: Usar o geoplano para melhorar a compreensão sobre perímetro e área de figuras planas concretamente. Utilização de geometria Analítica como ferramenta para ver retas paralelas e perpendiculares e outros conceitos afins.

Geoespaço: Geometria Espacial: Ampliar a compreensão de figuras geométricas no espaço 3D. Observar concretamente a idéia de volume, altura, área lateral e área total.

Torre de Hanói: Álgebra: Verificar a regularidade existente em relação ao número de peças e o número de movimentos. Elaborar a lei da função, associando estes dois números.
Jogos Topológicos: Lógica: Observar a regularidade existente em cada jogo para dinamizar percepção espacial.
Teorema de Pitágoras I e II: Geometria plana: Conhecer o teorema de Pitágoras, usando para isso conceitos de semelhança. Reconhecer e aprofundar o conceito de área. Verificar a desigualdade triangular; Aritmética: reconhecer números pitagóricos.
Pirâmide de Moedas: Geometria Plana: Forma e traçado de circunferência, simetria;
Lógica: percepção no movimento das peças para forma outra pirâmide, a partir da pirâmide original.
Além de testar vários jogos, cada participante vai sair com um jogo realizado durante a oficina.

Capacidade: 20 pessoas.
Nível adaptados à idade e motivação do público (1º, 2º, 3º ano).

2.2 Os cristais do Universo

Nível: Ensino Médio

Objetivo Geral: Descobrir a beleza das formas e das simetrias nesta oficina sobre poliedros, onde serão experimentados vários modos de construir poliedros e onde serão descobertas algumas propriedades curiosas destas formas.
Cada participante poderá levar um poliedro realizado durante a oficina.
Serão abordados os conceitos de simetria, poliedro, polígono, ângulos.

Capacidade: 20 pessoas.
Nível e técnicas adaptados em função da idade e motivação do público (3° ano)

2.3. Matemagia

Nível: Ensino Médio

Objetivo Geral: Trabalhar alguns conceitos básicos de cálculo, paridade, divisibilidade e topologia
Adivinhação, transmissão de pensamento, sucesso nos jogos de cartas, dados e moedas. Saindo desta oficina, o poder dos alunos não vai parecer ter limites, onde vão também aprender a se libertar dos mais complexos laços.
Os segredos são cálculo, paridade, divisibilidade, topologia e outras propriedades matemáticas simples.

Capacidade: 20 pessoas.
Nível e técnicas adaptados em função da idade e motivação do público (1º, 2º, 3º ano do Ensino Médio).

2.4. Os segredos da razão áurea e do código da Vinci

Nível: Ensino Médio

Objetivo Geral: Trabalhar conceitos matemáticos tais como:proporções, cálculo, ângulos, espirais, pentágonos, e números irracionais.
Será que existe um ideal de beleza? O que significa na verdade o misterioso homem desenhado por Leonardo da Vinci ? Descubra as proporções e figuras secretas da natureza e a misteriosa "seção aúrea" já conhecida por Euclides.
Uma aventura envolvendo proporções, cálculo, ângulos, espirais, pentágonos, números irracionais, entre outros conceitos matemáticos.

Capacidade: 20 pessoas.
Nível e técnicas adaptados em função da idade e motivação do público
(1º, 2º, 3° ano do Ensino Médio).

2.5. A terceira dimensão

Nível: Ensino Médio

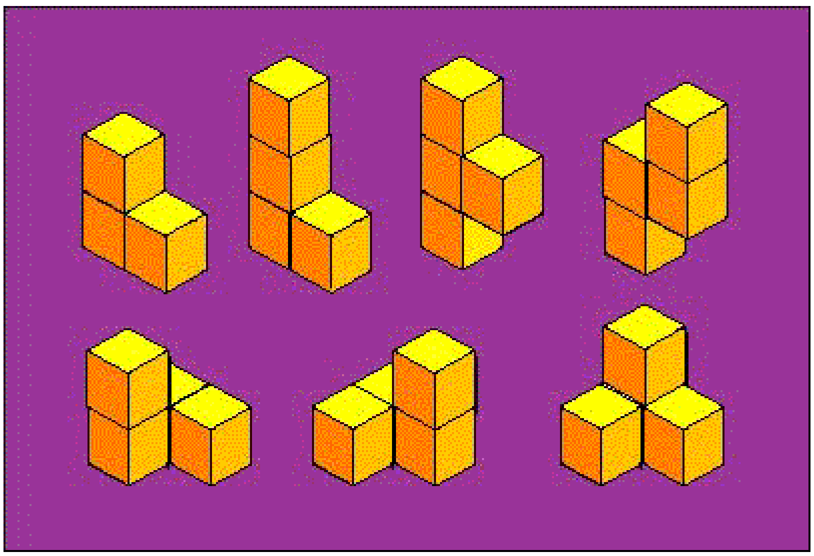
Objetivo Geral: Trabalhar conceitos matemáticos relacionados com geometria espacial.
Desvende os segredos da perspectiva, usando as mesmas máquinas dos artistas do Renascimento e descobrindo uma geometria estranha, onde o infinito cabe dentro da folha de papel. Veja as diferenças entre as diversas técnicas utilizadas pelos especialistas, arquitetos e pintores. Descubra as anamorfoses, perspectivas e ilusões estranhas "a ponto de não crer nos próprios olhos".

Capacidade: 20 pessoas
Nível e técnicas adaptados em função da idade e motivação do público (1º.2º, 3° ano).

3. JOGOS-EXPERIMENTOS INTERATIVOS

3.1 Cubo da Soma

Colando pequenos cubos de madeira entre eles por uma face, você pode fabricar 10 formas usando 3 ou 4 cubos unitários. Juntando as 7 formas abaixo desenhadas, é possível de construir um cubo 3x3x3. Chamado de "Cubo Soma", este quebra-cabeça foi inventado por o matemático danês Piet Hein em 1936.
Se pode observar que duas das peças são como imagens uma da outra num espelho. Tais formas simetricas, que podem se encontrar também na química, geologia, biologia... são chamadas de "enantiomorfes" (literalmente do grego "forma contrária")



Nível

O cubo Soma pode se usar com alunos de vários níveis, dependendo dos objetivos a serem alcançados.
Por exemplo, no jardim de infância, os meninos já podem, brincando, se habituar a manipular as peças, observá-las, contar os cubos, evidenciar a simetria , achar nomes para cada forma, tentar encaixamentos com algumas peças etc. Mais tarde, eles podem tentar reconstruir o cubo, ou pelo menos terminá-lo, ou imitar algumas formas como se faz com o "Tangram" (veja abaixo "complementos").

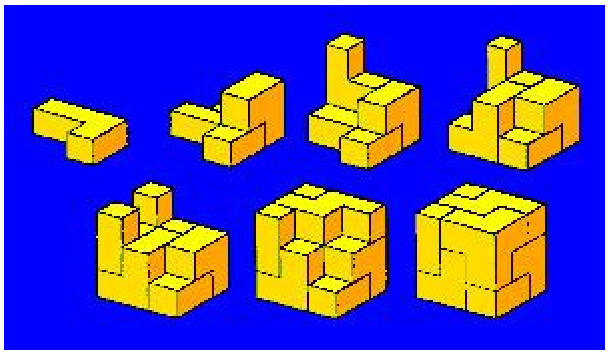
Alunos maiores podem treinar também para reconstruir o cubo, desenhá-lo, construir cubos imagens um do outro em tal simetria ou rotação indicada... O cubo não é muito difícil de construir, devido ao número elevado de soluções: 240 soluções distintas, sem falar das outras obtidas a partir dessas por isométrias do cubo (rotações e simetrias).
Para qualquer nível, este quebra-cabeça contribui à agilizar a representação espacial e a percepção da orientação no espaço tridimensional.

Preparação do jogo

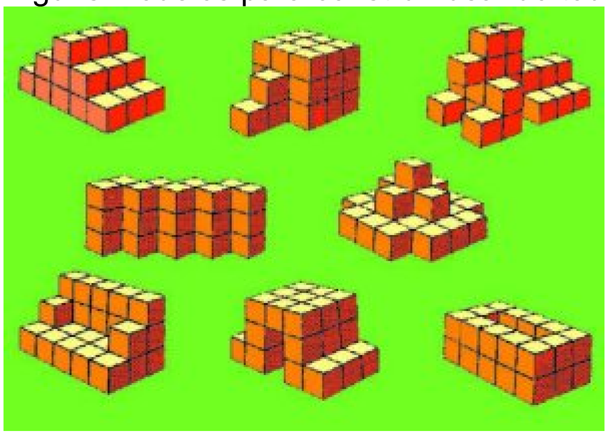
As sete peças estão já prontas. O professor só tem que detalhar as instruções e arrumar as peças devidamente aos objetivos didáticos escolhidos (veja acima).

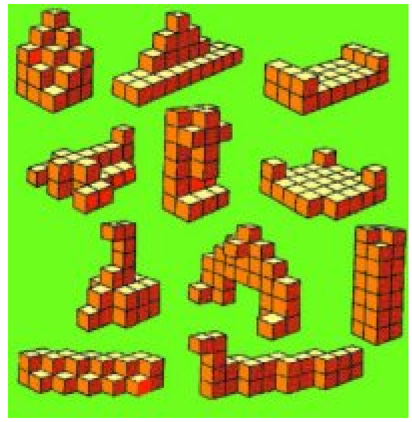
Solução

Uma das inúmeras soluções é a seguinte:



Complementos
Alguns modelos para construir usando todas as mesmas sete peças:





Duplicação

O jogo pode se duplicar com uma certa facilidade cortando e colando pedaços de madeira. Para isso, tem que cortar bem reto uma barra de seção quadrada (2 cm x 2 cm, por exemplo).

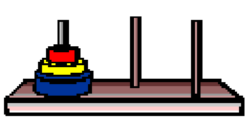
Precisará de dois pedaços de três cubos (6 cm no caso de uma seção 2 x 2), oito pedaços de dois cubos (4 cm no caso de uma seção 2 x 2),cinco cubos isolados (2 cm no caso de uma seção 2 x 2).
Antes de colar, terá ainda que marcar com uma caneta o limite entre os cubos nas barras de 2 ou 3 cubos.

3.2 Torre Hanói

A Torre de Hanói, jogo criado por os matemáticos franceses E. Lucas e De Parville em 1894, consiste num conjunto de três pinos fixos numa base comum. Num dos pinos, 7 peças furadas estão enfiadas em ordem decrescente de tamanho, de baixo para cima. O desafio consiste em transportar uma a uma essas sete peças para um dos outros pinos num menor número possível de movimentos. Não é permitido, em nenhuma etapa, que uma peça fique pousada sobre outra de menor tamanho.

Na criação, foi apresentado como se fosse trazido de um mosteiro vietnamita, onde os monges passassem o tempo todo movendo 40 discos gigantes de bronze. A lenda afirmava que o último movimento seria o sinal do fim do mundo (depois de ler essa ficha, você pode calcular quando este fim do mundo está programado !)

Nível



Trata-se de um jogo que pode ser trabalhado em variados níveis.

É importante que os mais jovens jogadores comecem com poucas peças (por exemplo, as 3 menores peças). A complexidade dos movimentos cresce rapidamente com o número de peças. Com as sete peças, é difícil de controlar a estratégia, e o sucesso só parece um efeito do acaso.

Preparação do jogo

Enfiar os três pinos no suporte de madeira, e pousar o número desejado de peças no primeiro pino. O jogo é normalmente solitário, mas melhor ainda jogado em equipes de 2, alternando os papeis : o primeiro jogador movimenta as peças, enquanto o segundo fiscaliza a boa aplicação das regras e verifica a contagem dos movimentos.

Estratégia

Para ajudar a construção de uma estratégia pode começar-se com um número reduzido de peças (3 ou 4). Juntando um novo disco aparece um princípio de recorrência que livra a estratégia:

Se sei fazer a manipulação com 3 discos, por exemplo, e vi que precisava pelo menos de 7 movimentos, para passar quatro peças do pino 1 até o pino 3, tem que:

- passar as três menores no pino 2 (7 movimentos),
- passar a maior no pino 3 (1 movimento),
- passar de novo as três menores do pino 2 até o pino 3 (7 movimentos).

Vai precisar finalmente de 15 movimentos.

De maneira geral, à cada nova etapa, você pode repetir a decomposição acima, isolando a maior peça: tem que dobrar o número de movimentos e adicionar um.

E quem sabe fazer esse raciocínio, na prática ou de maneira explícita vai saber resolver o problema para qualquer número de discos (só precisará de paciência).

Experimentando pouco a pouco, ou usando a lei acima achada, observamos os números mínimos de movimentos:

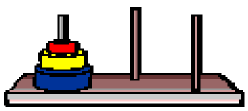
1 peça 1 movimento
2 peças 3 movimentos
3 peças 7 movimentos
4 peças 15 movimentos
5 peças 31 movimentos.

Observando também que, cada vez é quase o dobro de movimentos, podemos buscar a relação com as potências sucessivas de dois: 2, 4, 8, 16, 32 e constar no final que o número de movimentos para mover n peças é sempre $2n – 1$, o que pode se demonstrar quando você conhece o princípio de recorrência, pois $2 \times (2n – 1) + 1 = 2\ n+1 – 1$.

Complementos

Para os que gostam da programação, o jogo de Hanói é um exemplo tradicional e muito fácil de programar do que as pessoas que trabalham com informática chamam de recursividade, o que significa um programa que se chama ele mesmo:

- Hanói (n) do pino 1 até pino 3, se n = 1, movimentar uma peça do pino 1 até pino 3,
- sair,
- senão fazer Hanói (n– 1) do pino 1 até o pino 2, movimentar uma peça do pino 1 até pino 3,fazer Hanói (n–1) do pino 1 até pino 3.
- fim.

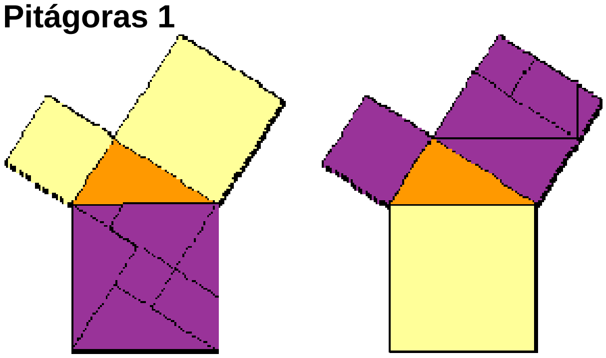


Duplicação

O melhor material para as peças é compensado ou madeira, mas podem também se cortar em cartolina espessa. Cortar peças quadradas de lado 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm e 8 cm . Não é indispensável furar as peças e providenciar pinos: o tabueiro pode ser simplesmente um retângulo de cartolina de tamanho 11 x 30, onde três quadrados de papel colorido de lado 9 cm, igualmente espaçados, materializam as três áreas onde tem que empilhar as peças.

3.3 Quebra Cabeça de Pitágoras 1 e 2

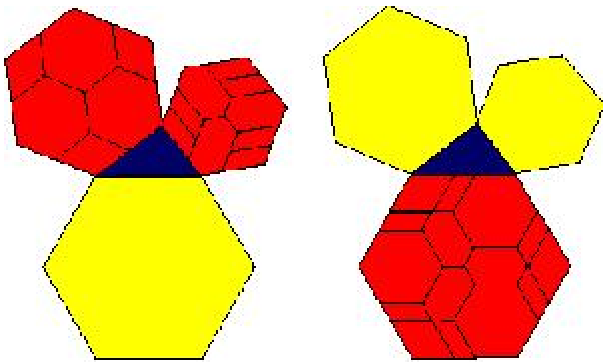
Pitágoras 1



Trata-se de um quebra-cabeça de montagem de peças representando figuras planas (4 triângulos, 2 trapézios, e um quadrado) que devem ser justapostas para formar seja um, sejam dois quadrados, como pode-se ver na figura acima.

Levando em conta o princípio da aditividade relativa às áreas de figuras planas justapostas, é possível concluir que a área do maior quadrado é a soma das áreas dos dois quadrados menores. Daí se parte para a identificação desses quadrados como sendo construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Ter-se-ia, dessa forma, uma verificação material do teorema de Pitágoras.

Pitágoras 2



Nesta outra versão, faz-se uso de um quebra-cabeça análogo, composto de peças que formam hexágonos regulares cujos lados são os lados de um triângulo retângulo.

Nível

Pitágoras 1: Nem precisa saber nada sobre o teorema de Pitágoras para resolver esses dois quebra-cabeças. Desde que o professor dê as instruções adequadas, alunos muito jovens podem tentar dispor as peças na grande figura ou nas duas pequenas, usando para arrumá-los mais propriedades de forma, de simetria ou de tamanho das peças que de qualquer conhecimento a respeito do próprio teorema de Pitágoras.

Com alunos um pouco maiores, que conhecem a área do quadrado sem porém ter tido estudado o teorema, o professor pode sublinhar a descoberta, mostrar com outros exemplos que só funcionam com triângulos retângulos.

Pitágoras 2: a realização do quebra-cabeça está aqui complicada pois as peças são mais numerosas, e as formas menos usuais que no Pitágoras 1, mas alunos que não conhecem o teorema podem ainda também acertar.

Para alunos na hora de estudar o teorema de Pitágoras, percebe-se, assim, que a área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre cada um dos catetos. As questões que se devem propor, a seguir, visam a descoberta do princípio matemático subjacente ao quebra-cabeça e a formulação de uma generalização muito interessante do teorema de Pitágoras: a área de qualquer figura construída sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é soma das áreas das figuras semelhantes construídas sobre cada um dos catetos.

Preparação do jogo

Só tem que separar as peças, que são de cores diferentes para Pitágoras 1 e Pitágoras 2. Caso de bloqueagem, o professor pode ainda ajudar aqui colocando uma peça ou duas nos seus lugares.

Estratégia
Pitágoras 1: Para ajudar a construção do grande quadrado, caso precise, o professor pode também chamar atenção em que:

- Duas peças são triângulos retângulos,
- Quatro outras peças podem ser utilizadas para formar dois outros triângulos congruentes a esses dois,
- As hipotenusas desses quatro triângulos congruentes são iguais aos lados do grande quadrado...

Para ajudar na construção dos dois outros quadrados, ele pode insistir em que:

- Os dois triângulos maiores não podem caber no pequeno quadrado,
- Colocados no outro, duas das peças não podem mais entrar com eles, e vão completar o pequeno quadrado.
-

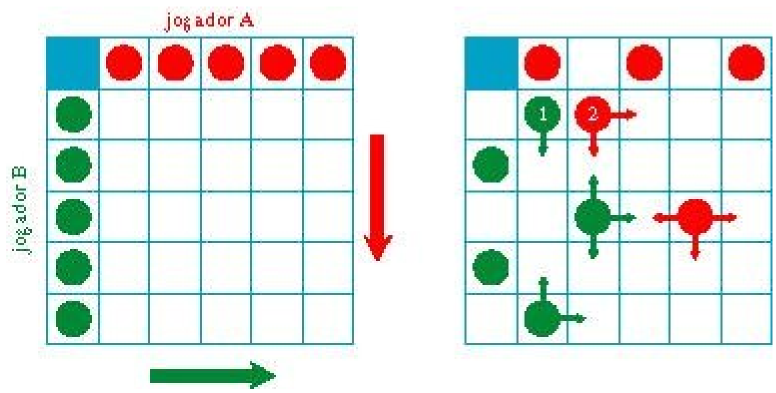
Pitágoras 2: o professor pode aqui insistir em descobrir figuras com simetria de ordem 3 (invariantes por rotações de 120°)

Complementos.
Para alunos que já conhecem o teorema de Pitágoras, ou vão estudá-lo, a divisão do grande quadrado entre quatro triângulos congruentes e um quadrado pequeno pode lembrar uma demonstração desse teorema. Chamando os lados dos triângulos a, b, c em ordem crescente, o lado do pequeno quadrado fica igual a $b - a$, e a sua área é $(b - a)2$; Então é possível escrever $c2 = (b - a)2 + 4\ ab/2$, pois cada um dos triângulos tem uma área de $ab/2$.
Desenvolvendo, vem: $c2 = b2 - 2ab + a2 + 2ab = a2 + b2$.

Duplicação.
As peças podem se duplicar em cartolina ou compensado; e o tabuleiro pode ser simplesmente desenhado numa folha de papel ou de cartolina.

3.4 Peão à Frente

Descrição
O peão à frente é um jogo para dois jogadores composto de um tabuleiro 6 x 6 e dois grupos de 5 peões de cores diferentes. O objetivo do jogo é, saindo de um lado do tabuleiro, atingir o lado oposto com os seus cinco peões.
Os peões sempre devem ir em frente ou de lado, uma casa de cada vez, e nunca podem voltar para trás (veja abaixo a figura 2).
O peão que chega por trás de uma casa ocupada deve esperar que ela se libere, ou contorná-la (na medida que o adversário deixa contornar-se !)



Nível

As regras do jogo são muito simples e uma partida tem curta duração, tornando-o um jogo atraente e divertido. Para os alunos mais jovens, o jogo pode também se imaginar com três peões num tabuleiro 4 x 4, o que torna o jogo ainda mais simples e rápido.

Trata-se de um jogo que pode ser utilizado para treinar a observação e a elaboração de estratégias baseadas em previsões, analisando os diversos movimentos possíveis do adversário.

Preparação do jogo

Apenas dispor os peãos no tabuleiro.

Estratégia

Por exemplo, na figura 2, o peão branco 1, bloqueado pelo peão preto 2, pode contornar este peão por baixo. Para impedir essa manobra, o jogador A pode acompanhar, descendo o peão 2 uma casa (essa manobra faz também parte do seu objetivo de descer as peças). Considerando que o peão 1 esta também bloqueando a saída de um peão preto, parece mais inteligente para o jogador B esperar, adiantando um outro peão branco: o peão 2 será de qualquer jeito obrigado a descer.

O jogador que começa tem uma vantagem certa: pode se utilizar esta para equilibrar o jogo entre dois jogadores desiguais, senão tem que alternar.

Complementos

O tabuleiro e os peãos podem também ser utilizados no jogo de Damas e outras variações do jogo de Nim.

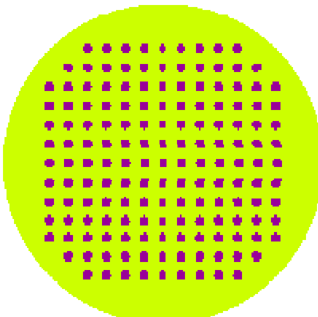
Duplicação

O material é muito simples a duplicar, uma vez que precisa só de um tabuleiro desenhado numa folha de papel ou de cartolina e de qualquer tipo de peões de duas cores ou formas diferentes (tampas de garrafas, pedrinhas

3.5. Tábua de Geoplano

Descrição

O Geoplano é constituído por uma tábua onde pinos desenham uma rede quadricular. Borrachas podem materializar o contorno de polígonos que admitem seus vértices nessa rede



Nível

Trata-se de um material aberto, que pode receber várias aplicações em variados níveis de desenvolvimento dos alunos, desde primeiros passos até a fim do ensino básico, entre quais:

- identificação de direções privilegiadas (horizontal, vertical, diagonais ...)
- identificação classificação ou reprodução de polígonos simples ou mais complexos
- realização de figuras semelhantes à outras já realizadas
- medição e comparação de áreas e perímetros
- codagem de uma figura usando movimentos de um vértice a um outro (translações).
- transformações geométricas
- pesquisa da relação entre área, número dos pontos internos, dos vértices, e dos outros pontos da periferia (teorema de Pick)
- conceito de ângulo (medição)
- noção de vetor, adição de vetores
- relações entre triângulos semelhantes
- seno, coseno, tangente de um ângulo, invariança dessas razões em triângulos semelhantes...
- pode ser também aproveitado para descoberta de várias figuras de geometria por alunos com problemas de visão.

Preparação do material

Já pronto. Caso precise, preparar tal configuração para estudar.

Complementos: o teorema de Pick

Observando para vários polígonos a área A, o número I de pontos do quadrículo internos ao polígono e o número L daqueles que pertencem aos lados, pode se constar o seguinte : $A = I + L/2 - 1$.

Essa formula, inventada por o matemático Tchéco Pick, em 1899, pode se mostrar por meio de uma decomposição em triângulos elementares.

Duplicação

Pode se realizar através de uma tábua de compensado de tamanho suficiente, de espessura mínima 10 mm, ou melhor 15 mm, desenhando o quadrículo e plantando nas interseções pregos do tipo "sem cabeça".

4. EXPERIMENTOS DE MATEMÁTICA COM AMBIENTE DE TECNOLOGIA INFORMÁTICA

Objetivo: Analisar e avaliar o potencial da tecnologia informática na sala de aula de matemática .
Duas questões vão orientar a discussão:

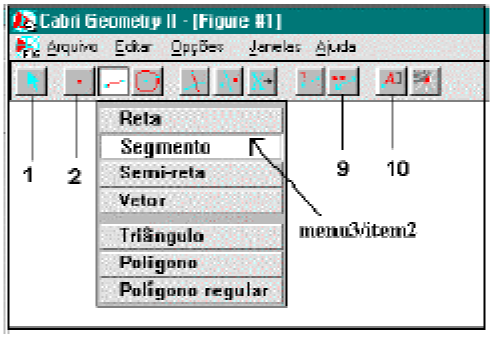
1. Por quê o uso de tecnologia informática ? ;
2. Como usar tal tecnologia no processo de ensino e aprendizagem da matemática?

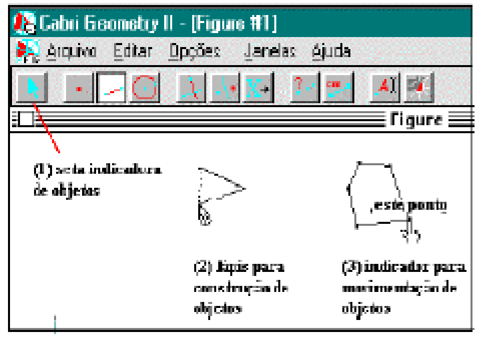
Serão discutidos e avaliados diferentes software, dando-se ênfase aqueles que apresentam recursos para práticas pedagógicas que colocam o aluno no papel de ativo aprendiz. Isto significa que estarão sob atenção os ambientes informatizados referidos na literatura como "ambientes de exploração e expressão": são ambientes que possibilitam trabalho em consonância com concepção de aprendizagem dentro de uma abordagem construtivista, a qual tem como princípio que o conhecimento é construído a partir das ações do sujeito. No contexto da matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o "fazer matemática" : experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar, demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação discursiva por parte do professor.

Diferentes tópicos de geometria serão explorados no software Cabri-Géomètre; curvas e regiões no plano, funções e gráficos serão tópicos explorados no software Graphequation. Além desses software, serão apresentados outros de domínio público (disponíveis no site Educação Matemática e Novas Tecnologias, em http://www. mat. ufrgs. br / ~edumatec), entre eles Poly e Tangram, de forma tal que os participantes da oficina, se professores provenientes de escolas com laboratório de informática, de imediato possam implementar, com seus alunos, trabalhos dentro do espírito discutido na oficina.

A mais antiga das teorias MAGNÍFICAS é a geometria euclidiana, sobre a qual aprendemos alguma coisa na escola. Os antigos podem não tê-la visto como uma teoria física, mas de fato é isto que ela é : uma sublime e magnificamente acurada teoria do espaço físico e da geometria dos corpos rígidos. Hoje nós sabemos que a geometria euclidiana não é inteiramente acurada na descrição do mundo que habitamos. Mas isto não retira o seu caráter de MAGNÍFICA. Na escala dos metros, erros em tratar a geometria como euclidiana são menores do que o diâmetro de um átomo de hidrogênio."

Interface do Software.





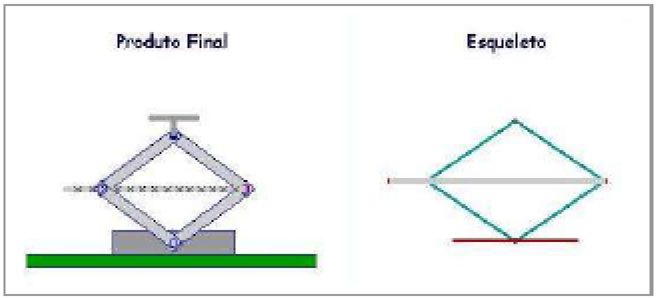
Os ambientes de geometria dinâmica — Cabri-Géomètre é um exemplar — são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador. O processo de construção de objetos é feito mediante escolhas de primitivas disponibilizadas pelo programa em seus diferentes menus — pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de pseudoprimitivas, via procedimento que automatiza as rotinas — a macroconstrução.

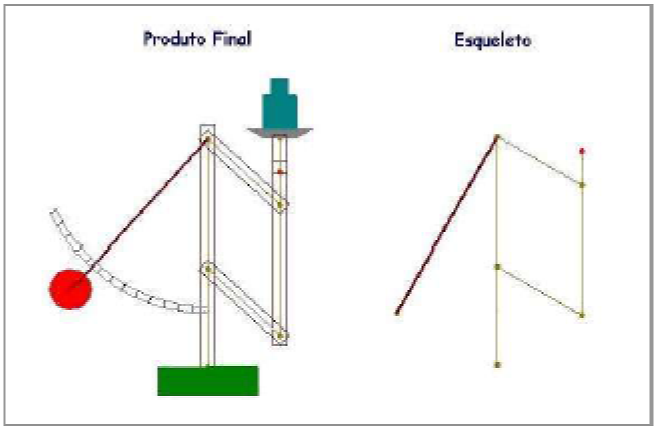
Parte I - Geometria prática / lúdica

O mundo que nos rodeia está repleto de situações em que a geometria está presente, e mais, de situações em que formas geométricas se apresentam em movimento. A modelação destas “formas em movimento”, quer sejam de caráter prático ou lúdico, apresenta-se como uma interessante atividade para os alunos que estão iniciando o estudo da geometria.

Exemplos

- Para construir um “mecanismo” primeiro deve-se pensar na construção do seu “esqueleto” geométrico, e depois no acabamento final.



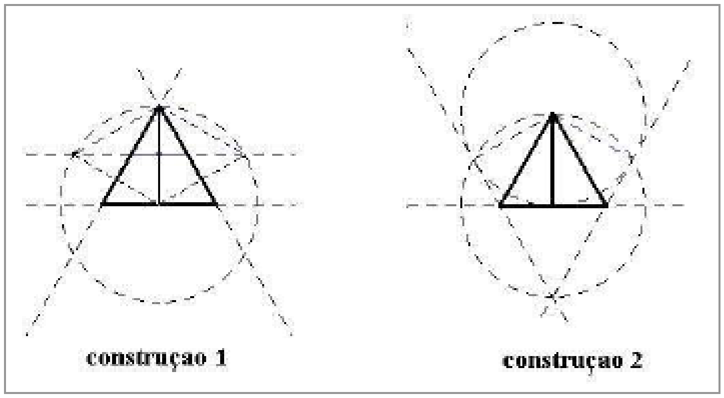


Parte II - Geometria dedutiva

a) Aprendendo a demonstrar via construções com régua e compasso

O recurso de “estabilidade sob ação de movimento” coloca em cena o propósito e a necessidade de uma demonstração: feita uma construção, mediante deslocamentos (*dragging*) aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador — uma instância de representação do objeto — transforma-se mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes. Ou seja, para um dado objeto ou propriedade, tem-se na tela do computador uma coleção de “desenhos em movimento” que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. Se pretende-se o estudo da geometria dedutiva, os invariantes não declarados colocam-se como “fatos a serem demonstrados “ a partir dos “fatos explicitados” no processo de construção da figura. Tem-se assim, no dinamismo das construções com régua e compasso uma porta-de-entrada para o aprendizado da demonstração.

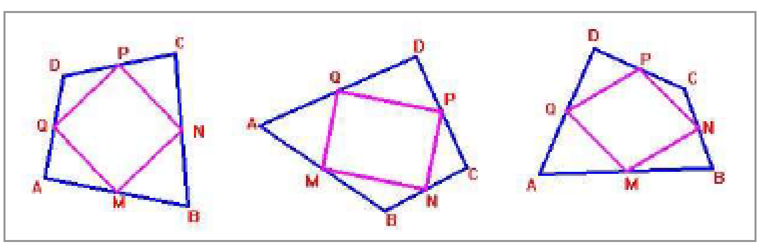
Exemplo: diferentes construções do triângulo eqüilátero, a partir da altura.



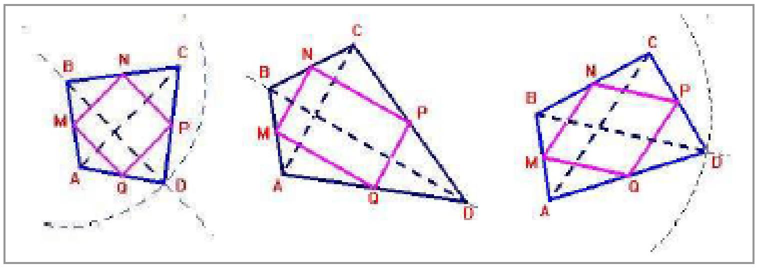
b) Atividade "caixa-preta"

Nas atividades do tipo "caixa preta" a tela do computador mostra uma figura geométrica e os alunos não têm acesso ao procedimento de construção utilizado (para isto utiliza-se o recurso de macro-construção). Explorando o "desenho em movimento" que aí se descortina, o desafio é construir réplicas das "caixas pretas", para o que eles devem analisar as propriedades geométricas contidas no dinamismo e na estabilidade da figura. Ao "abrir a caixa-preta" os alunos estão determinando, via construção geométrica, as hipóteses que garantem a estabilidade geométrica da figura, ou seja, neste tipo de atividade "salta aos olhos" na tela do computador a tese de um teorema, cujas hipóteses devem ser explicitadas.

Exemplo: quadrados, retângulos, losangos inscritos em quadriláteros.



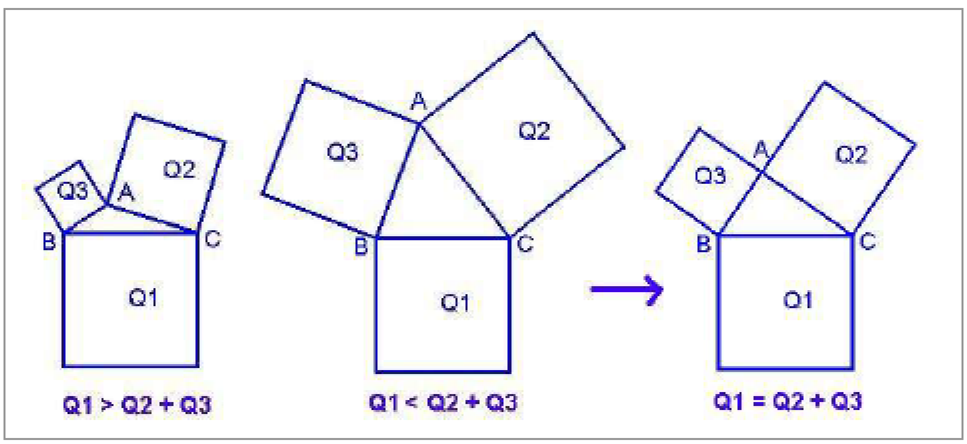
Ao movimentar-se os vértices A, B e C das "caixas-pretas", os quadriláteros MNPQ sempre guardam uma regularidade. Se isto acontece é porque o quadrilátero ABCD tem particularidades. Que particularidades são estas ?.
Movimento aplicado aos vértices do quadrilátero ABCD fazem emergir, nas suas diagonais, as particularidades que garantem as formas especiais de MNPQ:



c) Teoremas dinâmicos

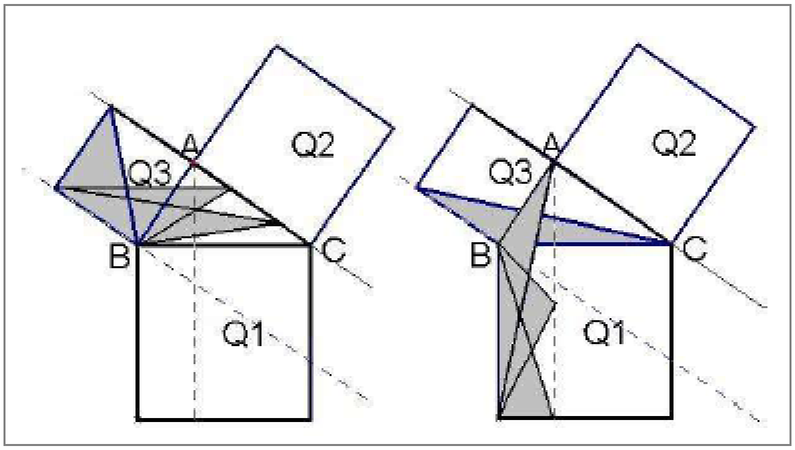
O dinamismo das figuras geométricas traz um novo tratamento para os enunciados clássicos da geometria: teoremas passam a ser vistos não como propriedades estáticas, mas como casos especiais de uma certa classe de desenhos em movimento. Tal tipo de tratamento coloca em evidência, de modo natural, a plausibilidade do teorema e provoca perguntas de natureza generalizadora. Ilustra-se este tratamento no caso do teorema de Pitágoras.

Exemplo: a plausibilidade do teorema de Pitágoras.

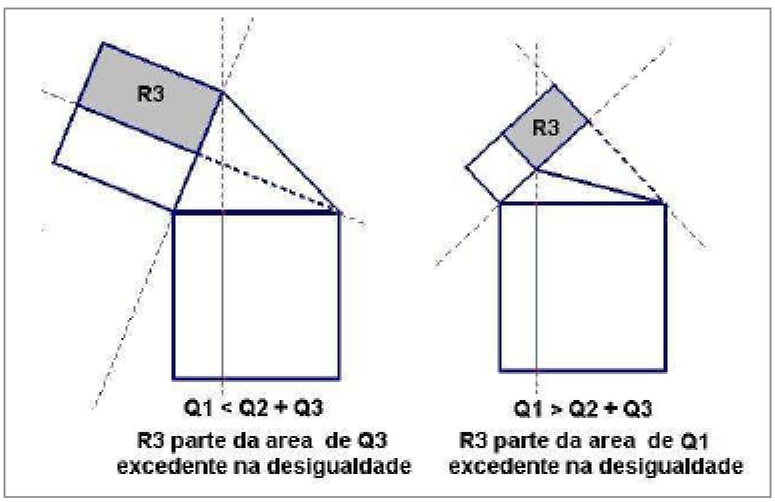


Considera-se inicialmente a figura “triângulo qualquer com quadrados construídos sobre os lados”. Movimento aplicado ao vértice A informa sobre a relação entre áreas dos quadrados, e dada a continuidade na variação das áreas, necessariamente conclui-se sobre a igualdade:

Trata-se agora de explicar o caso de igualdade de áreas, tendo-se como indicação que isto decorre do fato “ser triângulo retângulo” . O dinamismo possibilitado pelo software propicia uma clara compreensão da demonstração: triângulos de área constante “deslizando” em retas paralelas, rotação de triângulo e novo deslize em retas paralelas:



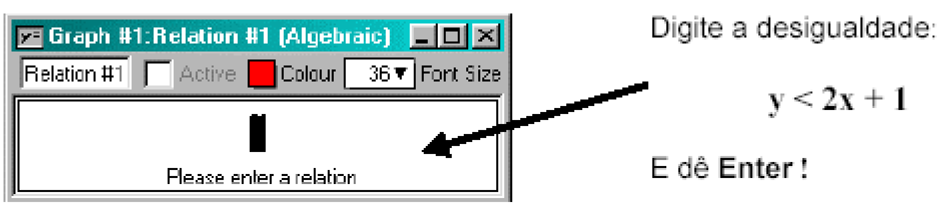
Surge naturalmente a pergunta generalizadora: no caso de triângulo qualquer que relação de igualdade pode ser estabelecida entre as áreas dos quadrados? O dinamismo informa que são as retas suporte das alturas relativas ao três lados do triângulo que determinam as compensações de áreas que permitem estabelecer relações de igualdade, e tem-se nisso uma demonstração geométrica para a lei dos cosenos:



Com o software **Graphequation** podemos “desenhar” paisagens, isso atravésde representação gráfica de funções e relações. Para construir uma paisagem pensamos em certas "formas" e a elas devemos associar relações matemáticas. Tomando como ponto de partida uma função bastante simples, aplicamos operações algébricas sobre sua expressão, produzindo diferentes transformações no seu gráfico – translações, reflexões, dilatações, contrações – de modo a obter a “forma” desejada. Exemplificando: na paisagem abaixo as montanhas foram obtidas através de transformações no gráfico de **y = x2** ; o mar através de transformações em **y = sin x**; os raios do sol como resultado de transformação sobre a reta **y = x,** etc.

I – Conhecendo o Graphequation.

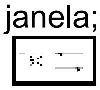
1. Ao abrir o programa tem-se a janela:



*Feito isto, aparece uma janela **GRAPH#1 : CREATE VIEW** .

2. Clique em 

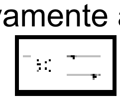
 e observe a região do plano que é desenhada.

3. Volte para a janela **Graph #1: Relation #1**, para isto clicando o mouse sobre a janela; posicione o cursor no final da desigualdade digitada e aperte a tecla:  .

4 Na segunda linha disponibilizada na janela digite **-3 < x < 3** e dê **Enter**.

*Observe o que acontece com a região delimitada anteriormente.

5. Volte para a janela **Graph #1: Relation #1**, posicione o cursor no final da equação digitada e aperte novamente a tecla:



6. Na terceira linha digite **y > -x – 8** e dê **Enter**. Observe o que acontece com a região.

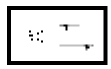
7. Agora vá em  e selecione  .

*Na nova janela de relações digite:

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 9$

e dê **Enter**. Observe o que acontece.

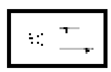
*Digite a desigualdade: **y < 2x + 1 e** dê **Enter !**
Volte para a janela **Graph #1: Relation #2**, posicione o cursor no final da equação digitada e aperte a tecla:



a. Na segunda linha digite y > 5 e dê **Enter.** Observe o que acontece.

Resumindo os procedimentos

Para iniciar um desenho seleciona-se **File/New Graph** Na janela **Graph#...: Relation#1** digita-se a relação desejada; nesta janela também pode-se digitar outras relações, quando quer-se fazer intersecção de regiões, e para isto deve-se usar a tecla:



Para acrescentar novas relações, na mesma janela gráfica, seleciona-se **Graph /New Relation**

Na janela **Easy Buttons** tem-se recursos para digitar as relações; vamos usar principalmente as opções **Algebra, Arithmetic, Set e Trig**

II

N

II – Desenhando as montanhas

No desenho de montanhas vamos usar a função quadrática **$y = a (x - b)^2 + c$**

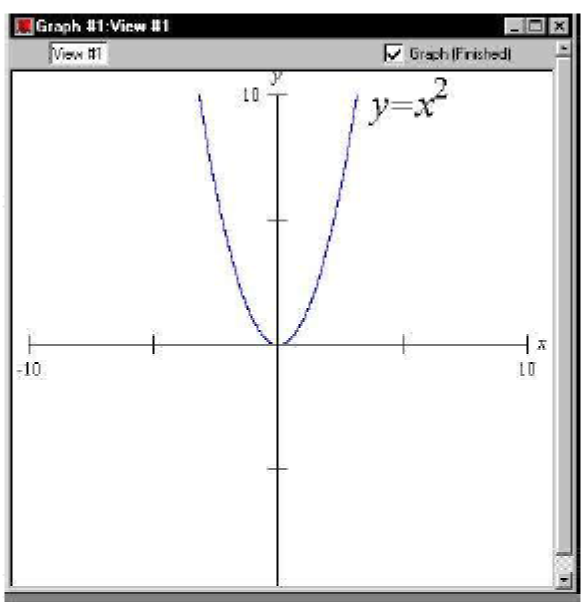
1. Selecione **File/New Graph**

Faça o gráfico de **y = x2** , digitando esta relação na janela **Graph #2: Relation #1.**

2. Selecione **Graph / New Relation**

Faça o gráfico de **$y = a (x - b)^2 + c$** , para diferentes valores de **a** , **b** e **c** digitando esta relação na nova janela de relações. Dê **Enter** e observe o efeito. Volte a janela **Graph #2: Relation** #2 e atribua novos valores para **a, b** e **c** até que se torne claro o significado desses parâmetros em termos de transformações sobre o gráfico de **$y = x^2$**

3. Selecione **File/New Graph** e usando desigualdades **y < a (x-b)2 + c** construa montanhas, escolhendo diferentes tons da cor verde.



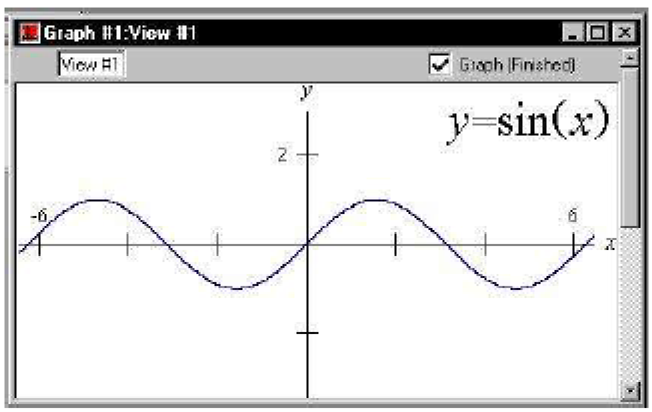
III – Desenhando o mar

Para desenhar o mar vamos usar a função **y = a sin (b. x) + c**

1. Selecione **File/New Graph**
Faça o gráfico de **y = sin x** , digitando esta relação na janela **Graph #3: Relation #1.**

2. Selecione **Graph / New Relation**
Faça o gráfico de **y = a sin (b. (x-c)) + d** , para diferentes valores de **a , b** e **c** digitando esta relação na nova janela. .
Volte a janela de relações **Graph #3: Relation #2** e atribua novos valores para **a, b, c e d** até que se torne claro o significado desses parâmetros em termos de transformações sobre o gráfico de **y = sin x**

3. Selecione **File/New Graph** e usando desigualdades do tipo abaixo construa "ondas" do mar, escolhendo diferentes tons da cor azul.
y < a . sin (b. (x-c)) + d



4. A composição da **função valor absoluto** com a função **y =a . sin (b. (x-c)) + d** dá um efeito interessante para as ondas do mar.
Selecione **File / New Graph**
Faça o gráfico de **y = valor absoluto de [a sin (b. (x-c)) + d]** , para diferentes valores de **a , b, c** e **d.**

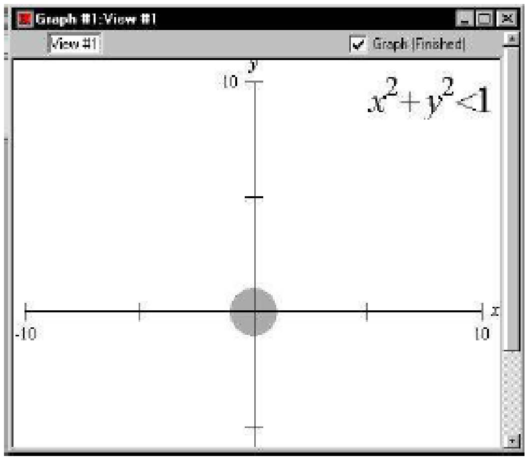
Atenção: Para digitar a função valor absoluto use as teclas Alt + barra invertida \

IV – Desenhando o sol

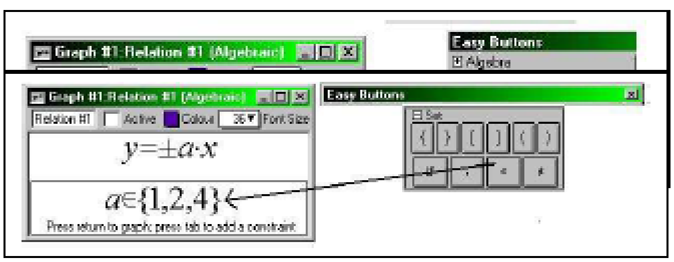
Para desenhar o 'centro' do sol vamos usar a relação **(x-a)2 + (y-b)2 < r2** e para desenhar os 'raios' de sol vamos usar feixe de retas **y – b = a (x-c)**

1. Selecione **File/New Graph**
Delimite o círculo **(x-a)2 + (y-b)2 < r2**, digitando esta relação na janela **Graph #4: Relation #1,** para diferentes valores de **a , b** e **r .** Escolha a cor para o centro do sol

2. Selecione **Graph / New Relation**
Selecione em **Easy Buttons / Arithmetic** o sinal + -, escreva as relações dadas abaixo e observe o efeito:

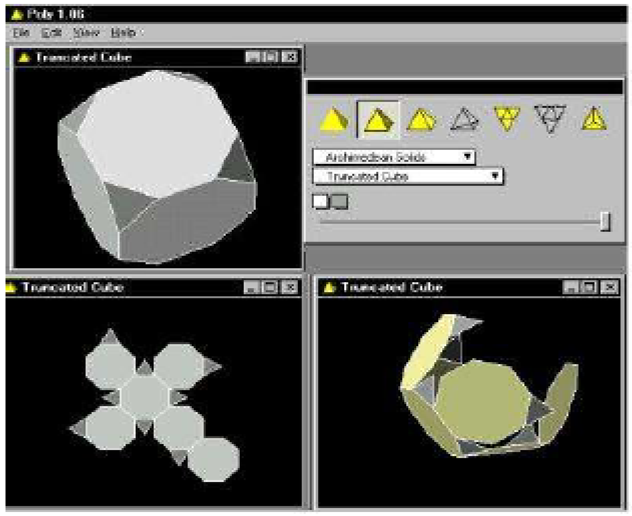


Relações para "centro" do sol
1.
2.
3.
Relações para "raios" do sol
1.
2.



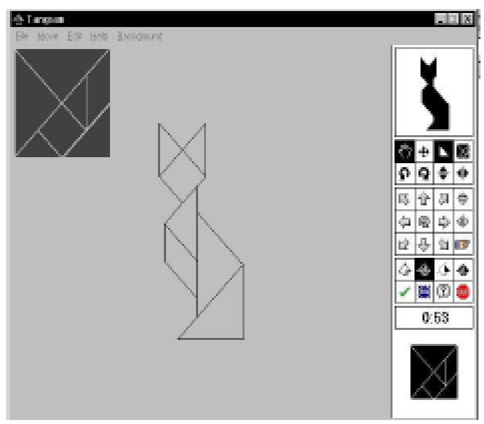
POLY:

Este software permite explorar diferentes famílias de poliedros convexos: os platônicos, os arquimedianos, os prismas e antiprismas, os poliedros duais. É possível aplicar movimento aos poliedros e também planificá-los.



TANGRAM:

Este é um software de caráter lúdico, que trabalha com transformações no plano: translação, reflexão e rotação. É interessante observar que "brincar" no Tangram virtual, diferentemente do usual quebra-cabeça, exige o entendimento de movimentos no plano, sobo ponto de vista conceitual.



APOIO: